946

Métodos operativos de cálculo diferencial

Fausto Cervantes Ortiz

Básicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Métodos operativos
de
cálculo diferencial

Métodos operativos
de
cálculo diferencial

Este material fue aprobado para su publicación por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Unidad Azcapotzalco de la UAM, en su sesión del día 24 de febrero del 2004.

Métodos operativos de cálculo diferencial

Fausto Cervantes Ortiz

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-31-0319-7

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Métodos operativos de cálculo diferencial

1a. edición, 2005
1a. reimpresión 2006

Impreso en México

Índice

Introducción		9
Capítulo 1	Funciones	11
	Intervalos	11
	Desigualdades	13
	Ejercicios 1.1	15
	Valor absoluto	16
	Ejercicios 1.2	18
	Elementos de las funciones	19
	Ejercicios 1.3	20
	Simetrías	21
	Monotonía	23
	Funciones algebraicas	24
	Transformación de funciones	30
	Combinación de funciones	33
	Composición de funciones	34
	Ejercicios 1.4	37
	Funciones definidas por secciones	38
	Ejercicios 1.5	43
	Problemas de aplicación	46
	Ejercicios 1.6	50
	Modelos matemáticos	51
	Ejercicios 1.7	53

Capítulo 2	Límites	55
	Tangentes	55
	Velocidades	56
	Definición del límite	57
	Límites laterales	59
	Reglas para calcular límites	60
	Ejercicios 2.1	62
	Límites que involucran infinitos	64
	Ejercicios 2.2	65
	Continuidad de las funciones	67
	Teoremas del valor intermedio	69
	Comportamiento asintótico	70
	Ejercicios 2.3	73
Capítulo 3	Derivadas	77
	Tangentes	77
	Velocidades instantáneas	77
	Razones de cambio	79
	Definición de derivada	80
	Reglas de derivación básicas	81
	Ejercicios 3.1	81
	Derivación de productos de funciones	82
	Ejercicios 3.2	84
	Derivación de cocientes de funciones	84
	Ejercicios 3.3	85

	Regla de la cadena	86
	Ejercicios 3.4	88
	Derivación implícita	89
	Ejercicios 3.5	90
	Derivadas de orden superior	90
	La no existencia de la derivada	91
Capítulo 4	Aplicaciones de la derivada	95
	Monotonía	95
	Concavidad	96
	Máximos y mínimos	97
	Análisis de la variación de las funciones	101
	Ejercicios 4.1	107
	Razones de cambio relacionadas	108
	Ejercicios 4.2	112
	Problemas de optimización	114
	Ejercicios 4.3	116
Apéndices	Respuestas a los ejercicios	119
Bibliografía		131

Introducción

El presente trabajo tiene como finalidad promover en la unidad un texto para la UEA de cálculo diferencial e integral I que sea de utilidad para los alumnos en particular. Para elaborarlo se siguió minuciosamente el programa oficial vigente.

Puesto que en los exámenes departamentales lo que se califica es la habilidad para resolver ejercicios, se han dado una buena cantidad de ejemplos de su resolución y se han dado una gran cantidad de ejercicios para que el alumno los resuelva en cada capítulo, esperando que el alumno haga la mayor cantidad posible antes de cada examen. Para que el alumno pueda tener idea de su avance, en el apéndice se dan las respuestas a estos ejercicios.

Este texto no pretende ser exhaustivo ni mucho menos, simplemente trata de dar los conceptos mínimos necesarios para un buen desempeño durante el curso. Su utilidad ha sido probada, tanto en cursos tradicionales como del SAI que el autor ha impartido con este libro como texto básico.

Se agradece a todos los alumnos que han usado versiones previas por sus sugerencias y observaciones útiles. A quienes lo lean se agradecerá toda observación, sugerencia o crítica que sirva para mejorarlo.

México, D. F. Junio de 2004.

Capítulo 1

Funciones

En las ciencias, así como en sus aplicaciones, por ejemplo la ingeniería; es necesario tratar con cantidades mensurables, y su dependencia con otras cantidades en fenómenos importantes. Para tratar a las cantidades y las relaciones de dependencia se utiliza un lenguaje objetivo, preciso y universal: las matemáticas. Por esta razón, es necesario el conocimiento de la forma de tratar las cantidades y relaciones entre ellas matemáticamente. Una cantidad física se puede representar por medio de números. A la relación de dependencia de dos o más cantidades se le denomina *función*. Entonces estudiaremos números y funciones numéricas.

Usaremos el conjunto de los números reales para las funciones que queremos tratar. Pero a veces estaremos interesados sólo en un subconjunto de todo este enorme conjunto, por lo cual veremos la forma de representar subconjuntos apropiadamente.

Intervalos

Un intervalo es un subconjunto de los números reales delimitado claramente por uno o dos números. Si el intervalo en cuestión contiene a los números que lo delimitan, el intervalo se llama cerrado. Si no se incluyen los números que lo delimitan, se llama intervalo abierto. También puede haber intervalos semiabiertos (o semicerrados). Los diferentes tipos de intervalos se simbolizan como sigue:

El intervalo cerrado definido por los números a y b (suponiendo que $a < b$), se representa como:

$[a,b] \equiv \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

Lo que está entre llaves se lee como: el conjunto de x tales que a es menor o igual que x y x es menor o igual que b. El intervalo abierto definido por a y b se simboliza por:

$(a,b) \equiv \{x \mid a < x < b\}$.

Los intervalos semiabiertos definidos por a y b pueden ser:

$[a,b) \equiv \{x \mid a \leq x < b\}$

o

$(a,b] \equiv \{x \mid a < x \leq b\}$.

Cuando se define un intervalo por un solo número, tenemos intervalos infinitos de la forma:

$(a,\infty) \equiv \{x \mid x > a\}$

o

$[a, \infty) \equiv \{x \mid x \geq a\}$.

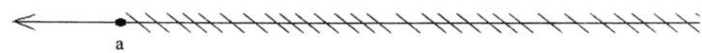
Hay que recalcar que ∞ NO es un número, sino simplemente un símbolo que dice que el intervalo se extiende indefinidamente hacia valores positivos arbitrarios. Lo mismo se puede decir de $-\infty$, para números negativos.

Geométricamente, estamos acostumbrados a representar los números reales por medio de la recta numérica. Los intervalos se pueden representar como segmentos de recta o rayos. Abajo se dan las representaciones de diferentes intervalos, consistentes en la región rayada.

$[a,b]$

(a,b)

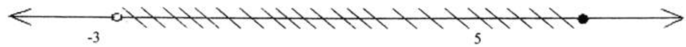
$[a,\infty)$



$(-\infty,b)$

Ejemplo:

El intervalo $(-3,5]$ se representa por:



y está dado por el conjunto:

$\{x \mid -3 < x \leq 5\}$

Desigualdades

Llamamos desigualdad a una expresión que representa una relación entre dos cantidades, una de las cuales es mayor (o en casos especiales, igual) que la otra. Resolver una desigualdad es hallar un intervalo para el cual se cumple la relación expresada.

Para las desigualdades, se cumplen las siguientes reglas:

1 Podemos sumar el mismo número a ambos miembros de la desigualdad:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad (1)$$

2 Podemos sumar dos desigualdades:

$$a < b \quad y \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d \qquad (2)$$

3 Podemos multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad ac < bc \qquad si\ c > 0 \qquad (3)$$

4 Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad -ac > -bc \qquad si\ c > 0 \qquad (4)$$

5 si tenemos dos números <u>positivos</u>, al tomar sus recíprocos debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad 1/a > 1/b \qquad si\ a > 0\ y\ b > 0. \qquad (5)$$

Ejemplo:

Resolver la desigualdad:

$2 + 4x < 10x + 6$

Restando 2 en ambos miembros obtenemos (regla 1):

$4x < 10x + 4$

Restando 10 x en ambos miembros (regla 1):

$-6x < 4$

Multiplicando por –1/6 (regla 4):

$x > -4/6$

Simplificando:

$x > -2/3$

El intervalo solución es $(-2/3,\infty)$

Ejemplo:

Resolver la desigualdad:

$x^2 + x - 6 < 0$

Factorizando el primer miembro:

$(x + 3)(x - 2) < 0$

Para que este producto sea negativo, se requiere que alguno de los factores sea positivo pero el otro sea negativo. Esto puede suceder en dos casos:

Caso 1:

$(x + 3) > 0$ y $(x - 2) < 0$

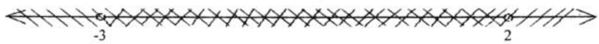
de la primer desigualdad obtenemos:

$x > -3$

mientras que la segunda nos da:

$x < 2.$

Como la condición es que las dos desigualdades se cumplan sinmultáneamente, debemos buscar la intersección de ambos intervalos. Esto se puede hacer gráficamente:



La región cruzada será el intervalo buscado, que es$(-3,2)$.

Caso 2

$(x + 3) < 0$ y $(x - 2) > 0$

La primera desigualdad nos da:

$x < -3$

La segunda nos da:

$x > 2.$

Como podemos ver en la siguiente gráfica, estos intervalos no tienen región de intersección, por lo que no hay conjunto alguno que sea solución.

En definitiva, la solución es:

$\{x \mid -3 < x < 2\}$

Ejercicios 1.1:

1) $1 + x < 7x + 5$

2) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

3) $x^3 + 3x^2 - 4x > 0$

4) $x^2 < 4$

5) $x^2 \geq 25$

6) $x^3 + 3x < 4x^2$

7) $-5 \leq 3x + 1 < 7$

8) $1/11 \leq \dfrac{1}{2x+1} \leq 1/5$

9) $2x - 3 \geq 5x - 2$

10) $x - 7 \leq 2(x - 3) + 4 - x$

11) $3x/4 - 8 > 7x/3 - 27$

12) $3x^2 - 7x < 0$

13) $(x + 3)^2 - 4(x + 3) \geq 0$

14) $(x + 7)^2 \geq 25$

15) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq \dfrac{2x+3}{x+1}$

16) $(2x + 3)^2 \leq 64$

17) $25x^2 \leq -30x - 18$

18) $4 < x^2 < 9$

19) $3x^2 + 7x - 10 < 0$

20) $x(x + 3)(x - 1) \leq 0$

21) $2x - 1 > \dfrac{1}{2x+1}$

22) $\dfrac{1}{x-1} \geq 2$

23) $-2.1 < x - 2 \leq -1.9$

24) $4.29 < 3 - x \leq 4.31$

25) $2 < \dfrac{1}{x-1} \leq 5$

26) $2x + 5 \leq \dfrac{2}{x+1}$

27) $4x^2 + 2x < 9 - 7x \leq 11 - 7x$

28) $3(x^2 + 1)(x - 2) > 0$

29) $x^3 + 1 > x^2 + x$

30) $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + 1} < 0$

31) $\dfrac{1}{x-1} < x + 1$

Valor absoluto

El valor absoluto de un número a se denota por $|a|$ y es la magnitud del segmento desde el origen hasta el número a sobre la recta. Como las magnitudes son siempre positivas (o cero), el valor absoluto es siempre positivo (o cero):

$|a| \geq 0$ para toda a, entonces:

$|a| = a$ si $a \geq 0$, (6)

$|a| = -a$ si $a < 0$. (7)

Ejemplos:

$|-5| = 5$

$|1 - \pi| = \pi - 1$

$|x - 1| = x - 1$ si $x - 1 \geq 0$, esto es, si $x \geq 1$

$|x-1| = 1-x$ si $x-1<0$, o sea, si $x<1$.

Cuando extraemos la raíz cuadrada de un número, normalmente se debe tomar la raíz positiva, por lo tanto se tiene que:

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{8}$$

Propiedades de los valores absolutos:

1 $|ab| = |a||b|$ (9)

2 $|a/b| = |a|/|b|$ $(b \neq 0)$ (10)

3 $|a^n| = |a|^n$ n entero (11)

4 $|a+b| \leq |a| + |b|$ (12)

5 $|x| = a$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm a$ (13)

6 $|x| < a$ $\Leftrightarrow$ $-a < x < a$ $(a > 0)$ (14)

7 $|x| > a$ $\Leftrightarrow$ $x > a$ ó $x < -a$ $(a > 0)$ (15)

Ejemplo:

Encontrar los valores de x que cumplan la siguiente igualdad:

$|3x-7| = 5$

Para que se cumpla la igualdad, debe cumplirse que (propiedad 5):

$3x-7 = -5$ ó $3x-7 = 5$

La primera igualdad nos da:

$x = 2/3$

mientras que la segunda nos da:

$x = 4$

Estos son los valores que debe tener x para que se cumpla la igualdad.

Ejemplo:

Resolver la desigualdad:

$|2x+8| \leq 3$

Por la propiedad 6 tenemos que:

$-3 \leq 2x + 8 \leq 3$

Restando 8 a los tres miembros tendremos:

$-11 \leq 2x \leq -5$

Dividiendo entre 2:

$-11/2 \leq x \leq -5/2$

Ejercicios 1.2:

1) $|2x - 5| = 3$

2) $|x - 5| < 2$

3) $|3x + 2| \geq 4$

4) $|x + 8| < 3$

5) $|3 - x| \geq 3$

6) $|x - 4| < 1$

7) $|x - 6| < 0.1$

8) $|x + 5| \geq 2$

9) $|x + 1| \geq 3$

10) $|2x - 3| \leq 0.4$

11) $|5x - 2| < 6$

12) $|-5x + 8| < 0.4$

13) $|2x - 1| \leq 0.02$

14) $|x - 8| \geq 0.2$

15) $|x - 1| < 0.1$

16) $|2x + 3| \leq 1/2$

17) $\left| -\frac{5}{x} + 8 \right| < 0.4$

18) $\left|\dfrac{2}{x}-2\right| \geq 0.4$

19) $\dfrac{|4x-2|}{x} \leq 3$

20) $\dfrac{1}{|2x-1|} < 2-x$

21) $\left|\dfrac{2x-1}{x-3}\right| < 2$

22) $|3x - 2| - |x + 1| < 5$

23) $|x + 3| \leq |5x - 1|$

24) $\dfrac{x^2-x+1}{|2-x|} \geq 1$

25) $|x - 0.5| < 1$

26) $|2 - x| < 0.75$

27) $\dfrac{1}{|x-4|} < \dfrac{1}{|x+7|}$

28) $\dfrac{|x-4|}{2x} < 1$

Elementos de las funciones

Representaremos una función que depende de una cantidad x por medio de f(x). A la cantidad x se le llama variable independiente y a f(x), variable dependiente. Al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se le llama *dominio* (D_f), y al de los valores que adquiere la variable dependiente se le llama *rango* (R_f). A veces se especifica el dominio de la función, pero otras veces no se dice nada. En esos casos el dominio es todo número para el que la expresión tenga sentido. En la definición de algunas funciones se hallan raíces cuadradas, fracciones, etc. Para estas funciones es importante observar que no están definidas para raíces cuadradas de cantidades negativas, ni para valores del dominio que den cero en el denominador, así que para encontrar su dominio será necesario resolver alguna desigualdad.

Para visualizar una función se usa una gráfica. Esto es el lugar geométrico de todos los pares ordenados de la forma (x,f(x)) graficados en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x$, para $0 \leq x \leq 1$

Para esta función el dominio es: D_f: $0 \leq x \leq 1$. El rango es: R_f: $0 \leq x \leq 2$.

A continuación se da la gráfica de esta función:

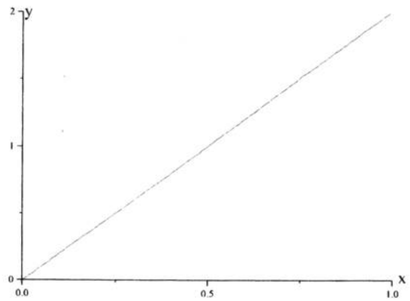


Figura 1.1. Gráfica de la función $f(x) = 2x$.

Ejemplo:

Encontrar el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2x-1}}$$

Solución:

En esta función no hay restricciones para el numerador, sino que x puede tomar cualquier valor. Por otra parte, para el denominador hay dos restricciones muy claras: la primera es que no debe valer cero nunca, mientras que la segunda es que la raíz cuadrada siempre debe estar definida, o sea que el radicando nunca debe tomar valores menores que cero. Estas restricciones se escriben como:

$2x - 1 \neq 0 \quad y \quad 2x - 1 \geq 0$

la primera nos dice que $x \neq 1/2$, mientras que la segunda nos dice que $x \geq 1/2$. Entonces, el dominio de la función es:

$1/2 < x \leq \infty$.

Ejercicios 1.3:

En los ejercicios siguientes, obtener el dominio de las funciones dadas.

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$

2) $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x-1}}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4x+4}$

5) $f(x) = \sqrt{(x+1)^2+3}$

6) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2-x}$

7) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3+2x^2}$

Simetrías

Algunas funciones son simétricas con respecto al eje y, otras son simétricas con respecto al origen. Si una función es simétrica con respecto al eje y se le llama *par*. Una función simétrica con respecto al origen es una función *impar*.

Las funciones pares cumplen que f (-x) = f(x). Las funciones impares cumplen que f(-x) = -f(x). Cuando sabemos que una función es par, podemos dibujar sólo la parte de la gráfica cuyo dominio es positivo y después completarla por reflexión con el eje y. Para una función impar también podemos completar la parte con dominio negativo al "rotar" la gráfica 180° con respecto al origen.

Ejemplo:

La función $f(x) = 3x^2 - 2x^4$ es par, puesto que:

$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x)^4 = 3x^2 - 2x^4 = f(x)$.

Su gráfica es:

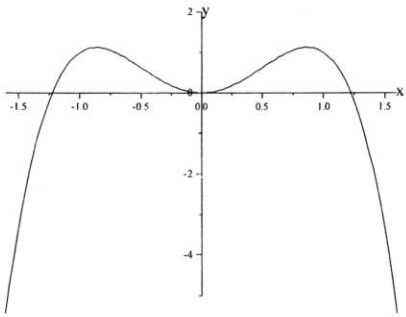


Figura 1.2. La función $f(x) = 3x^2 - 2x^4$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^3 - x$ es impar, pues:

$f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$.

Abajo se da la gráfica.

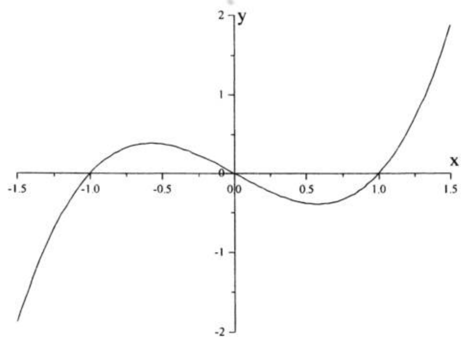


Figura 1.3. $f(x) = x^3 - x$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2 + 5x$ no es par ni impar, pues:

$f(-x) = x^2 - 5x$,

que no guarda relación ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Esto se ve en la gráfica:

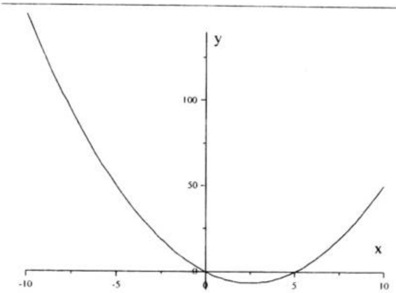


Figura 1.4. $f(x) = x^2 + 5x$.

Monotonía

Se dice que una función es creciente en un intervalo si para toda $x_1 < x_2$ en ese intervalo se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función es decreciente si para $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$. Una función puede ser creciente o decreciente en todo su dominio, o sólo en algunos intervalos a los que se les llaman intervalos de monotonía. Gráficamente vemos que una función es creciente si conforme crece x también crecen los valores de f(x), o sea, si la función "sube". Si pasa lo contrario (si la gráfica "baja") es decreciente. También puede ser que alguna función no sea creciente ni decreciente, sino que se mantenga constante en todo su dominio.

Ejemplo:

La función $f(x) = 2x + 1$ es creciente en todo su dominio.

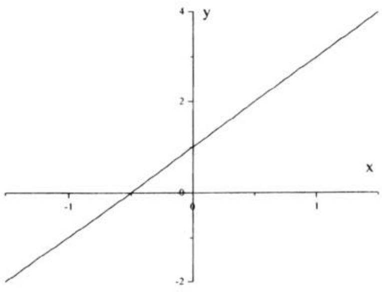


Figura 1.5. $f(x) = 2x+1$.

Ejemplo:

La función $f(x) = -x^3$ es decreciente en todo su dominio.

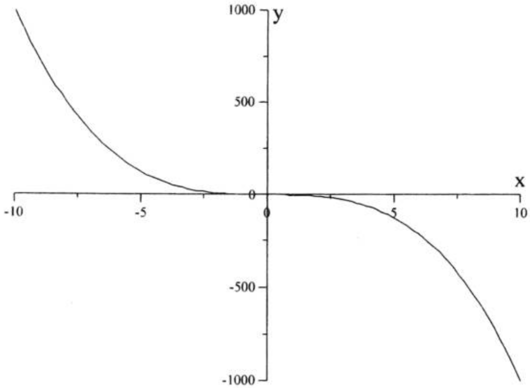


Figura 1.6. $f(x) = -x^3$.

Ejemplo:

La función $f(x) = -x^2 + 1$ es creciente en $-\infty \leq x < 0$, y es decreciente en $0 \leq x < \infty$.

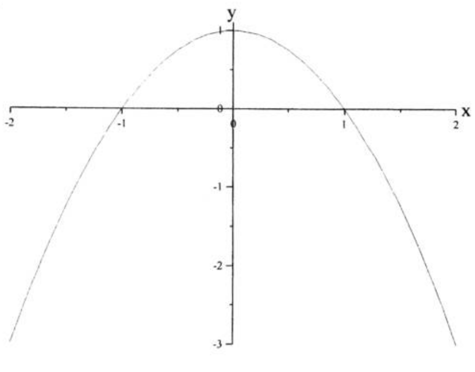


Figura 1.7. $f(x) = -x^2 + 1$.

Funciones algebraicas

Existen numerosas clases de funciones. Trataremos inicialmente con funciones algebraicas. Estas funciones son las que surgen cuando realizamos con x operaciones básicas: sumas o restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces. En esta sección, veremos algunas funciones elementales que será necesario conocer bien, para después poder construir otras nuevas.

Funciones constantes

La función $f(x) = c$ es aquella que le asigna el valor c a la función para todos los valores de x. La gráfica de esta función es:

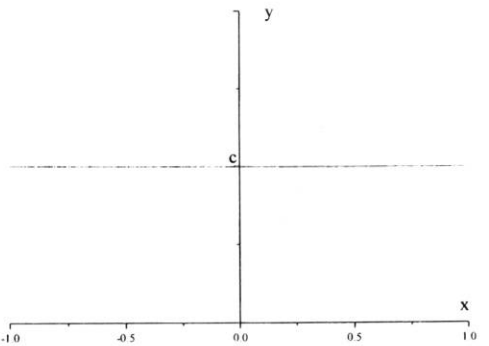


Figura 1.8. $f(x) = c$.

Funciones potenciales

Las funciones de la forma $f(x) = x^{\alpha}$ son muy importantes y de las más básicas. Veremos que pasa con su gráficas para diferentes valores de α.

Caso 1: $\alpha = n$, con n un entero positivo:

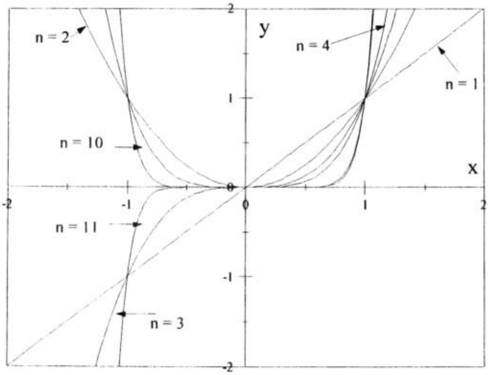


Figura 1.9. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

Nótese que si n es par, la función es par. Si n es impar, la función es impar. Cuando n crece, la función se pega al eje de las x si $|x| < 1$ y se pega a las rectas $|x| = 1$ si $|x| > 1$. Estas funciones tienen su dominio en todos los reales.

Caso 2: $\alpha = -n$:

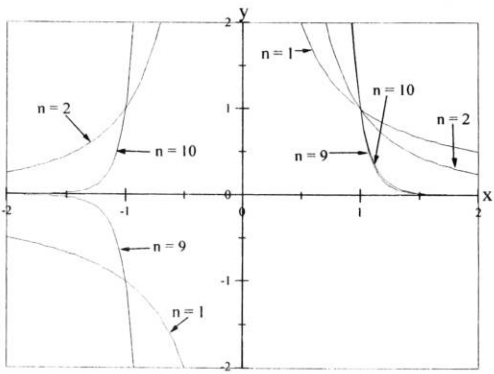


Figura 1.10. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$.

Nótese que si n es par, f(x) es par, y viceversa. Si n crece la función se pega al eje de las x para $|x| > 1$, y se pega a las rectas $|x| = 1$ si $|x| < 1$. Estas tienen como dominio a todos los reales, excepto el 0. Cerca del cero la función toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, acercándose cada vez más al eje de las y, pero sin llegar nunca a tocarlo. A este comportamiento se le llama asintótico. Más adelante estudiaremos con detalle esto.

Caso 3: $\alpha = 1/n$, n entero positivo:

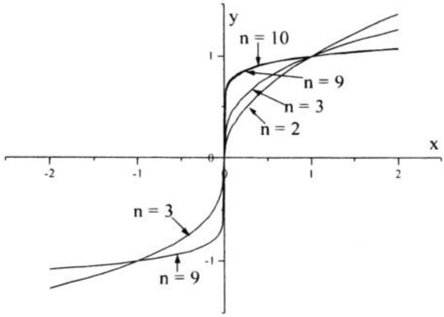


Figura 1.11. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha = 1/n$.

Notar que para n par, la función sólo está definida para las $x \geq 0$, pero si n es impar, está definida en todos los reales. Si n crece, la función se pega al eje de las y para $|x| \approx 0$, y después se pega a las rectas $|y| = 1$.

Caso 4: $\alpha = m/n$, m y n enteros positivos:

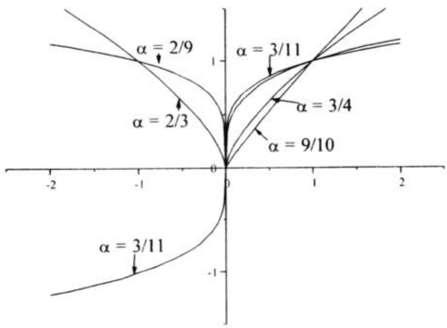


Figura 1.12. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha = m/n$.

Notemos que si n es par, la función no está definida para $x < 0$, pero si n es impar la función está definida para todos los reales. También se ve que en $x = 0$ la función tiene una "esquina" para valores pares de m (y valores impares de n).

Polinomios

Un polinomio es una suma de múltiplos de potencias y constantes, tales que n es un entero positivo. Al mayor valor de n en esta suma se le llama grado.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{16}$$

Para esto se supone que por lo menos a_n es diferente de cero. Enseguida se da la gráfica de algunos polinomios, para tener una idea ligera del comportamiento de éstos.

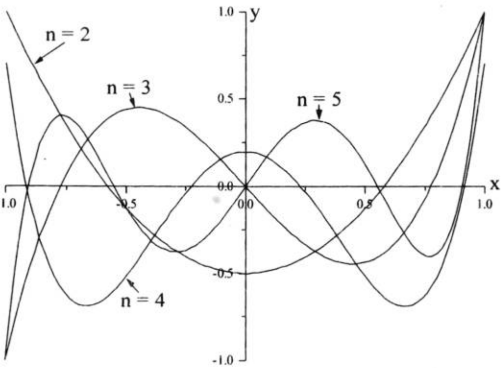


Figura 1.13. Polinomios.

Notemos que el grado del polinomio nos dice el número máximo de raíces, y de "dobleces" que puede tener la gráfica. Su dominio son todos los reales. Si un polinomio sólo tiene como sumandos potencias pares, es una función par, y es impar si pasa lo contrario.

Funciones racionales

Si tenemos el cociente de dos polinomios, le llamamos función racional.

$$R(x) = f(x)/g(x) \tag{17}$$

Las funciones racionales tienen su dominio en todos los valores de x, excepto aquellos en los que $g(x)$ se hace cero. Para las raíces de $g(x)$, la función toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, esto es, tiene asíntotas (más adelante detalla lo relativo a las asíntotas).
Ejemplo:

La gráfica de la función $f(x) = (2x^4 - x^2 + 1)/(x^2 - 4)$ tiene la forma mostrada a continuación:

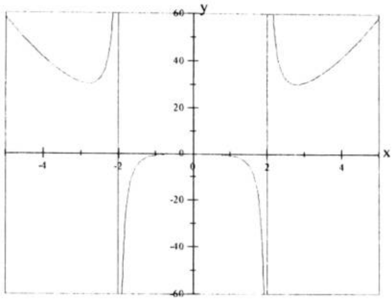


Figura I. 14. $f(x) = (2x^4 - x^2 + 1)/(x^2 - 4)$

Funciones irracionales

Cuando en una función intervienen raíces, se les llama funciones irracionales. El caso potencial $\alpha = m/n$ es un caso particular de funciones irracionales. Las funciones irracionales tienen como dominio todos los valores en los que la raíz esté definida. También hay que tomar las restricciones impuestas por cualesquiera otras operaciones que haya, por ejemplo cocientes. Es frecuente que las gráficas de estas funciones presenten "esquinas", como vemos con las funciones de la forma $x^{m/n}$. También es frecuente que tengan intervalos grandes que no pertenezcan a su dominio, y se formen "huecos".

Ejemplo:

La gráfica de la función $y = (x^2 - 4)^{1/3}$ tiene el siguiente aspecto:

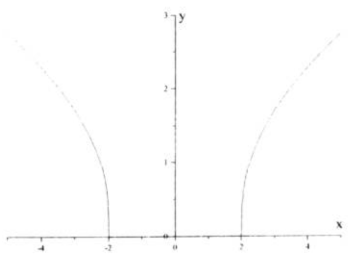


Figura I.15. $y = (x^2 - 4)^{1/3}$.

Transformación de funciones

Las funciones conocidas se pueden transformar en otras nuevas, a partir de ciertas operaciones entre ellas. Sea f (x) una función conocida. A continuación damos las principales operaciones que transforman esta función conocida en funciones nuevas.

Traslación:

Si a la función y = f(x) le sumamos una constante c, la función se trasladará verticalmente c unidades sobre el eje y.

Si a la función y = f(x) le restamos una constante c a x, de tal modo que tengamos y = f(x-c), la función se trasladará c unidades en dirección horizontal sobre el eje x.

Ejemplo:

Graficar $f(x) = x^2 + 2$.

Solución:

La función $y = x^2 + 2$ tiene una gráfica igual a la de la función $y = x^2$, pero desplazada dos unidades hacia arriba, como se ve en la siguiente figura:

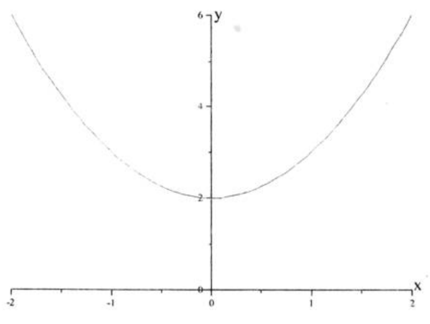


Figura 1.16. $f(x) = x^2 + 2$

Ejemplo:

Graficar la función $f(x) = (x - 2)^2$.

Solución:

La gráfica de la función $y = (x - 2)^2$ es igual a la de $y = x^2$, pero desplazada dos unidades a la derecha, según se ve en la siguiente figura:

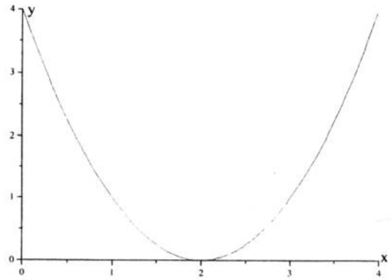


Figura 1.17. $f(x) = (x - 2)^2$.

Alargamientos (o compresiones):

Si en la función y = f(x) hacemos la operación y = cf(x), la función original se alarga c veces en la dirección vertical.

Haciendo y = [f(x)]/c, la función se comprime c veces verticalmente.

Si hacemos y = f(x/c), la función se alarga c veces horizontalmente.

Haciendo y = f(cx), la función se comprime horizontalmente c veces.

Ejemplo:

La función y = 2[x] hace que la función "escalera" vaya subiendo los escalones de 2 en 2, como vemos en la figura siguiente:

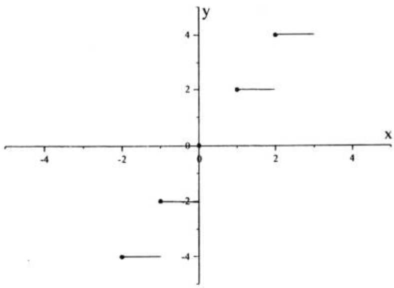


Figura 1.18. f(x) = 2[x].

La función y = [x/2] es la función "escalera" con los escalones más largos (al doble).

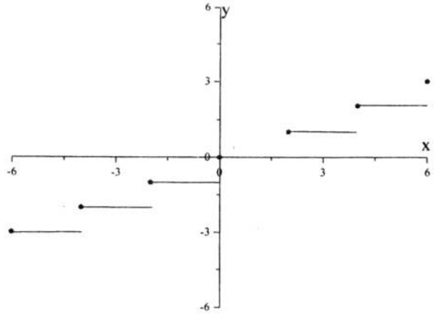


Figura 1.19. $f(x) = [x/2]$

Reflexiones:

La operación $y = -f(x)$ refleja a $f(x)$ con respecto al eje x.

La operación $y = f(-x)$ refleja a $f(x)$ con respecto al eje y.

Ejemplo:

La función $y = -(x^{1/2})$ refleja hacia abajo a la función $x^{1/2}$:

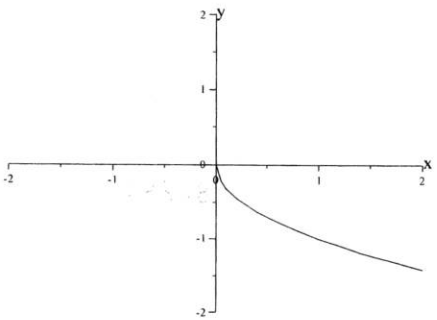


Figura 1.20. $f(x) = -(x^{1/2})$.

La función $y = (-x)^{1/2}$ refleja hacia la izquierda a la función $x^{1/2}$.

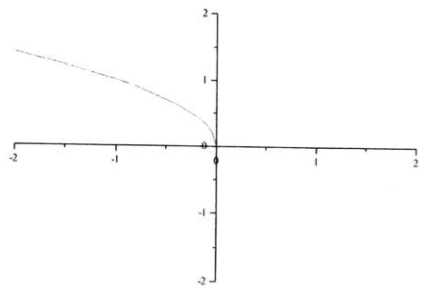


Figura 1.21. $f(x) = (-x)^{1/2}$.

Combinación de funciones

Se pueden combinar dos o más funciones conocidas para formar funciones nuevas, mediante las operaciones básicas conocidas, suma, resta, multiplicación y división. La nueva función resultante tendrá como dominio la intersección de los dominios de las funciones originales.

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ (18)

2) $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ (19)

3) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. (20)

En el caso de la división se excluye además a los valores de x que hagan que g(x) sea cero.

Al hacer operaciones con funciones a veces es posible graficar cada función independientemente y hacer la operación indicada entre algunos puntos notables de las gráficas por separado. No siempre es fácil encontrar la gráfica de la combinación, pero por lo menos tendremos una idea aproximada del comportamiento general.

Ejemplo:

Graficar $y = x + 1/x$ en $1 \leq x \leq 5$.

Solución:

La función $y = x + 1/x$ se obtiene de sumar las dos funciones conocidas $f(x) = x$ con $g(x) = 1/x$. Si graficamos cada función por separado y tratamos de sumar veremos que: Como la gráfica de $y = 1/x$ es decreciente, mientras que la de $y = x$ es creciente, la gráfica combinada tendrá regiones de crecimiento y de decrecimiento, por lo que por fuerza habrá un mínimo es algún punto. Este resulta ser el punto en que se cruzan las gráficas.

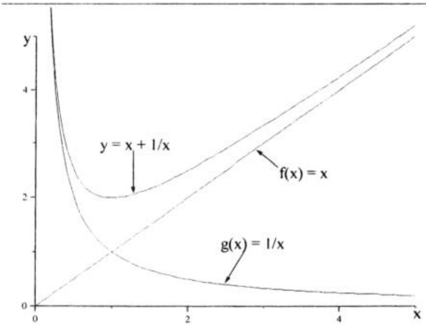


Figura 1.22. $f(x) = x+1/x$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x/(x^2 + 2)$ se obtiene al dividir $y = x$ entre $y = x^2 + 2$.

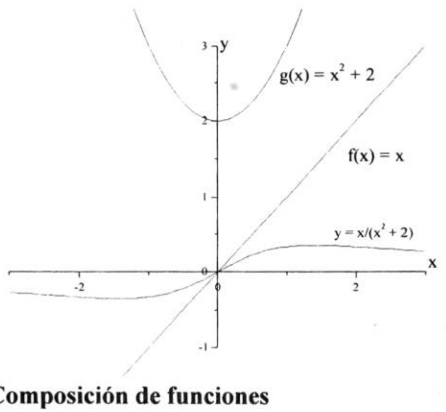


Figura 1.23. $f(x) = x/(x^2 + 2)$.

Composición de funciones

También se pueden obtener nuevas funciones por composición. La composición de funciones se denota con $(f \circ g)(x)$ y se define como:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \tag{21}$$

El dominio de una composición es aquel para el que $g(x)$ está definida, y $f[g(x)]$ también lo está. Esto no necesariamente coincide con los dominios de f y g, ni con la intersección de ambos dominios.

Ejemplo:

Sean $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^{3/2}$. Con esto tendremos que:

$(f \circ g)(x) = 2x^{3/2} - 1$

$(g \circ f)(x) = (2x - 1)^{3/2}$.

El dominio de f son todos los reales. Para g son sólo los reales no negativos. Pero para la composición (g o f) deben ser los reales que cumplan $2x - 1 \geq 0$, lo cual no es la intersección de los dominios de f y g.

Obviamente que también se pueden componer tres o más funciones, simplemente haciendo:

$(f \circ g \circ h)(x) = f\{g[h(x)]\}$

etc.

Ejemplo:

Sean $f(x) = 2x$, $g(x) = 1/x$ y $h(x) = x^3$. Entonces:

$(f \circ g \circ h)(x) = 2/x^3$

$(g \circ h \circ f)(x) = 1/8x^3$

etc.

Con todo lo aprendido en este capítulo, ya somos capaces de analizar el comportamiento de varias funciones y determinar sus características principales.

Ejemplo:

Graficar la función

$f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

y encontrar dominio, rango, raíces, paridad e intervalos de monotonía.

Solución:

Esta función es un polinomio, por lo cual sabemos que tendrá como máximo dos raíces (podría tener sólo una, o ninguna). Pero no sabemos dibujarla de primera vista, sino que hay que trabajar un poco con ella:

$f(x) = 2(x^2 + 4x + 3) = 2(x^2 + 4x + 4 - 1)$

este último paso nos sirvió para completar el cuadrado, por lo cual podremos escribir la función como:

$f(x) = 2(x+2)^2 - 2$

que es la función $y = x^2$ recorrida 2 lugares hacia la izquierda, alargada 2 veces en la dirección del eje y, y recorrida dos lugares hacia abajo. La gráfica va como sigue:

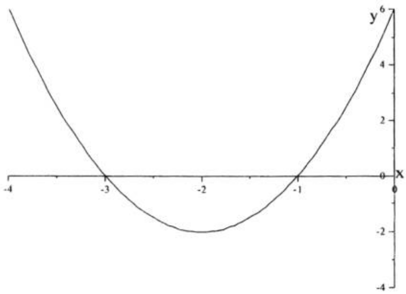


Figura 1.24. $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$.

Sabemos que para cualquier polinomio su dominio son todos los reales. De la gráfica vemos que su rango es $-2 \leq x < \infty$. Podemos factorizar la función como: $f(x) = 2(x + 1)(x + 3)$, por lo cual concluimos que las raíces son $x = -3$ y $x = -1$. Las raíces se obtienen también de la gráfica si se tiene suficiente resolución, pero generalmente será al revés: al obtener las raíces, sabremos por cuáles puntos corta al eje de las x. Al sustituir x por $-x$ vemos que: $f(-x) = 2x^2 - 8x + 6$, lo que indica que no hay paridad, como se ve también de la gráfica. La función es decreciente en $-\infty < x \leq -2$, y es creciente en $-2 \leq x < \infty$.

Ejemplo:

Graficar la función $y = 1 - 2/x$. Encontrar dominio, rango, raíces, paridad e intervalos de monotonía.

Solución:

Reconocemos a esta como la función $y = 1/x$, con las siguientes modificaciones: el 2 nos indica que está estirada al doble con respecto al eje y, el signo nos indica que está reflejada con respecto al eje x, el 1 nos indica que está recorrida una unidad hacia arriba. Con esto la gráfica queda:

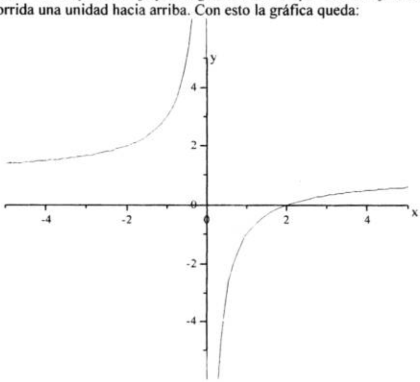


Figura 1.25. $f(x) = 1 - 2/x$.

De la gráfica vemos que el dominio son todos los reales, excepto el 0 (pues en ese valor no está definida la expresión). El rango son todos los reales excepto el 1, no tiene paridad y es creciente en todo su dominio. Las raíces se halla al igualar a cero y resolver:

$1 - 2/x = 0$

$x = 2/1 = 2$

Que coincide con lo que se ve en la gráfica.

Ejercicios 1.4:

Graficar las siguientes funciones:

1) $y = -1/x$

2) $y = x^2 + 2x + 3$

3) $y = 2 + 1/(x + 1)$

4) $y = (x + 2)^{1/3}$

5) $y = 1/(x - 3)$

6) $y = 1 + 2x - x^2$.

Graficar las funciones y hallar dominio y rango:

7) $f(x) = -x^2 + 3$

8) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

9) $f(x) = 5\sqrt{2x}$

10) $f(x) = 2 - \sqrt{4x - 2}$

Graficar las siguientes funciones y hallar dominio, rango, raíces e intervalos de monotonía.

11) $f(x) = -x + 1$

12) $f(x) = 6x - 2$

13) $f(x) = (x - 2)^3$

14) $f(x) = \sqrt{2x - 1} + 1/2$

15) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} - 1$

16) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$

17) Sean las funciones $g(x) = \sqrt{x+6}$ y $h(x) = x^2 + 2$. Obtener las siguientes funciones y sus respectivos dominios: a) $f(x) = (g \text{ o } h)(x)$; b) $f(x) = \dfrac{3g(x) + x^2 + 2}{h(x) - 6}$

18) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$ y $h(x) = x^2 - 4$, obtener: (f/g)(x), (h o f)(x) y (g o h)(x) así como sus respectivos dominios.

19) Sean $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = x + 1$. Determinar: (f + g)(x), (g – f)(x), (f g)(x), (f/g)(x), (f o g)(x) y (g o f)(x), con sus respectivos dominios.

Expresar cada una de las siguientes funciones como una composición de funciones:

20) $f(x) = (1 + x^3)^{27}$

21) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x+1}}$

22) $f(x) = \sqrt{(x - \sqrt{2+x})^3}$

23) Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ y $g(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Obtener (f o g)(x) y (g o f)(x), con sus respectivos dominios.

24) Lo mismo para $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ y $g(x) = 1/x$.

Funciones definidas por secciones

Existen funciones que tienen diferentes fórmulas de definición en diferentes partes de su dominio. Estas funciones se utilizan con más frecuencia de lo que parecería a primera vista, como se verá más adelante. Para definir funciones así, es necesario dar cuidadosamente los intervalos de validez de cada sección. Sin embargo existen muchas funciones que se usan tanto, que no es necesario definir cada vez los intervalos de validez, sino que se utiliza alguna notación especial previamente convenida. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ se define como $f(x) = x$ para $x \geq 0$, y como $f(x) = -x$ para $x < 0$. La gráfica de esta función se ve enseguida:

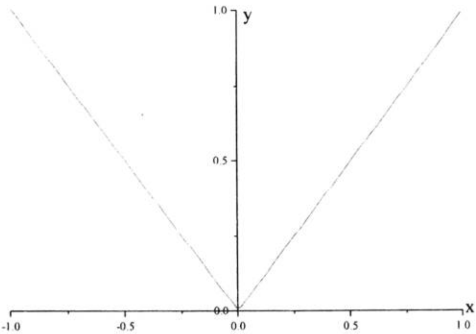


Figura 1.26. $f(x) = |x|$

Ejemplo:

La función:

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2}+1 & -2 \le x < 0 \\ x-1 & 0 \le x < 1 \\ 2x-2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

tiene como dominio de definición el intervalo [-1,1], su rango es [0,2], y su gráfica es la siguiente:

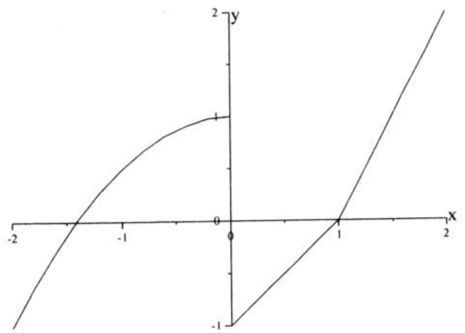


Figura 1.27. f(x).

Ejemplo:

La función:

$f(x) = [x]$ se define como la parte entera de x, y se denomina *función máximo entero*. También se le llamará a veces función "escalera". Algunos valores de f(x) son:

$f(1.3) = 1$
$f(\pi) = 3$
$f(-5) = -5$

La gráfica de esta función es la siguiente:

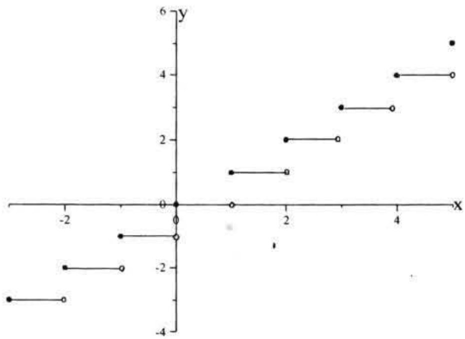


Figura 1.28. $f(x) = [x]$.

Ejemplo:

Cuando abordamos un taxi, el taxímetro marca al inicio del viaje \$ 4.80 (el banderazo), y después va dando saltos de \$ 0.65 por cada 45 segundos de tiempo transcurrido. Dar una expresión para el costo total de un viaje que dure t segundos.

Solución:

La forma más fácil de resolverlo es considerando lo que sucede en instantes de tiempo que sean múltiplos de 45, con lo que tendríamos la tabla siguiente:

t	C
0	4.80
45	5.45
90	6.10
135	6.75
180	7.40
225	8.05
270	8.70
315	9.35
360	10

Si hacemos la gráfica para estos puntos, obtendríamos algo como lo siguiente:

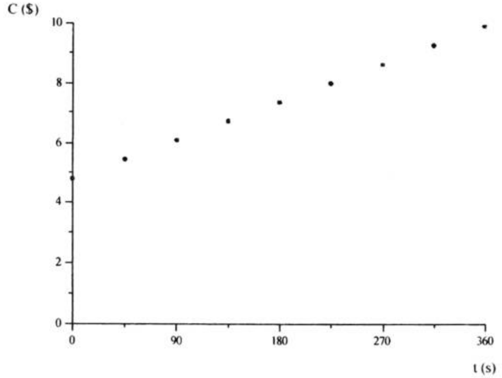


Figura 1.29.

Para completar la gráfica, NO debe cometerse el error de tratar de hacer pasar una recta a través de esos puntos: recuérdese que el taxímetro va dando saltos. La gráfica que describe esta situación es algo parecido a la función máximo entero, o sea algo como la siguiente:

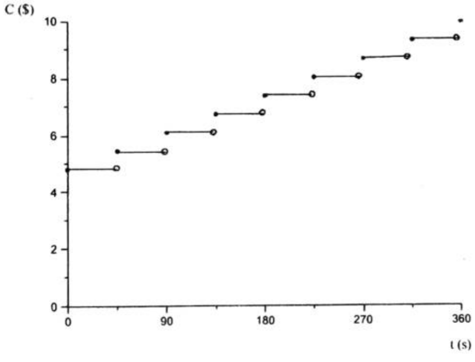


Figura 1.30.

Y la ecuación que describe esto será:

$C = 4.80 + 0.65[t/45]$

Ejemplo:

Dada la función:

$$f(x)\begin{cases} (x-1)^{1/2}+1 & x \geq 1 \\ |x|-1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

encontrar dominio, rango, intervalos de monotonía y dibujar su gráfica.

Solución:

Esta es una función definida en dos secciones diferentes. Trabajaremos con cada una por separado. Para la primera, tenemos a la función $y = x^{1/2}$ recorrida un lugar hacia la derecha (nos lo dice el -1 dentro de la raíz), y recorrida un lugar hacia arriba (nos lo dice el $+1$ luego de la raíz). Esto lo representamos gráficamente como:

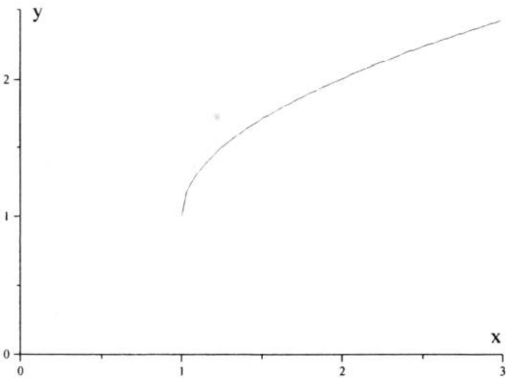


Figura 1.31.

Para la otra sección tenemos a la función $y = |x|$ recorrida en un lugar hacia abajo (nos lo indica el -1), por lo que completamos la gráfica como sigue:

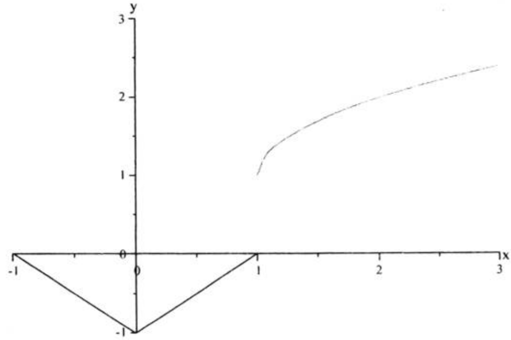


Figura 1.32.

Ejercicios 1.5:

Trazar la gráfica de las funciones siguientes, y hallar su rango:

1) $f(x)\begin{cases} x^2+1 & -4 \le x < -1 \\ 3x-3 & -1 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x}-2 & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

2) $f(x)\begin{cases} \sqrt{x^2-4} & -5 \le x \le -2 \\ \dfrac{1}{x-3} & -2 < x \le 1 \\ 1-2x & 1 < x \le 3 \end{cases}$

3) $f(x)\begin{cases} x & -4 \le x \le -2 \\ 2-x & -2 < x \le 2 \\ 1-2x & 2 < x \le 4 \end{cases}$

4) Dada la función:

$$f(x)\begin{cases} 4-x^2 & -3 \le x \le 1 \\ 3x & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) bosquejar la gráfica de la función y determinar dominio, rango y raíces.
b) Obtener los intervalos donde $g(t) \geq 0$ y donde $g(t) < 0$.
c) A partir de la gráfica de g, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t + 2) - 3$.

Obtener dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía y realizar un esbozo gráfico.

5) $f(x) = \begin{cases} |2x| & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \leq 0 \\ |x - 8| & x > 0 \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} 3|x - 2| & x < 3 \\ \dfrac{1}{x - 5} & x \geq 3 \end{cases}$

8) $f(x) \begin{cases} \sqrt{x - 4} & -4 \leq x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x - 3} & -2 < x \leq 1 \\ 4 - x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Obtener $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ $(f \cdot g)(x)$ y $(f/g)(x)$, para las funciones:

9) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x - 8 & 0 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & x \leq 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x} & x > 2 \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 - x & x > 4 \end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 0 \\ -1/x & x\ge 2 \end{cases}$$

11) $$f(x)\begin{cases} x-4 & -5\le x\le -2 \\ \dfrac{1}{x^2} & -2<x\le 1 \\ x^2-2 & 1<x\le 3 \end{cases}$$

$$g(x)\begin{cases} \sqrt{x-1} & -3\le x\le -1 \\ \dfrac{1}{3} & -1<x\le 1 \\ x-2 & 1<x\le 3 \end{cases}$$

12) Dada la función:

$$f(x)\begin{cases} x+4 & -5\le x\le -2 \\ 4-x^2 & -2<x\le 2 \\ 1 & 2<x\le 4 \end{cases}$$

a) Obtener la gráfica, el rango y las raíces de f.
b) A partir de la gráfica de f(x) hacer un bosquejo de la gráfica de la función:
$g(x) = 2f(x - 1) - 3$.

Graficar las funciones siguientes:

13) $f(x) = |x - 3| + 2$

14) $f(x) = 3|x - 2| - 1$

15) $f(x) = |x - 1/2|$

16) $f(x) = |-x + 3|$

17) $f(x) = 1 + 2|3x + 6|$

18) $f(x) = [x + 1]$

19) $f(x) = [3x]$

20) $f(x) = -1 + 3[-x + 2]$

21) Trazar la gráfica de una función tal que, para cualquier número en el intervalo [-2,0] sea igual al doble de ese número; para cada número en (0,1] sea igual a la tercera parte de ese número; para cada número en (1,5] sea igual al recíproco de ese número; para cada número en

(5,10] sea igual al negativo de ese número, y para cada número en $(10,\infty)$ sea igual a 23. Determinar el dominio y el rango de la función.

Problemas de aplicación

Lo aprendido las secciones anteriores se aplica continuamente a la solución de problemas, pues en ellos se nos dice únicamente con palabras las condiciones que se requiere satisfacer, mientras que lo que se requiere para tener una caracterización objetiva es alguna relación escrita en forma matemática. Por ejemplo, cuando nos dicen que una cantidad que depende de otra debe estar en cierto intervalo, debemos interpretarlo como en una desigualdad; o cuando se nos requiere encontrar una cantidad sabiendo otras relacionadas, lo que se está haciendo es definir una función sólo con palabras, por lo que debemos ser capaces de traducirla a términos matemáticos.

Cuando tengamos una función definida sólo con palabras, será fundamental poder pasar a la forma algebraica y/o visual para poder resolver el problema. En general para plantear correctamente un problema es necesario comprender correctamente qué es lo que buscamos, qué es lo que conocemos, además de las relaciones que existan entre las variables involucradas. Para ello frecuentemente es necesario tener a la mano fórmulas geométricas, de física, etc.

Ejemplo:

Se desea construir una caja con tapa y base cuadradas de lado x. Se quiere que la longitud x sea al menos de 0.20 m y su altura sea igual al doble de la longitud del lado de la base. Determinar el intervalo de variación de x para que la superficie total de la caja no exceda de 2.5 m^2.

Solución:

Como se requiere que la longitud sea de al menos 0.20 m, la primera restricción es que:

$x \geq 0.20$

Para la altura h se requiere que:

$h = 2x$

La primera contribución a la superficie total será la suma de las áreas de la base y la tapa, que son dos cuadrados de área x^2 cada uno, o sea que éstas contribuyen con un área parcial A_1 dada por:

$A_1 = 2\,x^2$

mientras que la contribución de los cuatro lados de la caja son cuatro rectángulos de área xh cada uno, por lo que su contribución A_2 es:

$A_2 = 4\,xh = 8\,x^2$

por lo tanto, el área total A será:

$A = 10\,x^2$

y ésta tiene que ser menor que 2.5 m^2. Esto implica que:

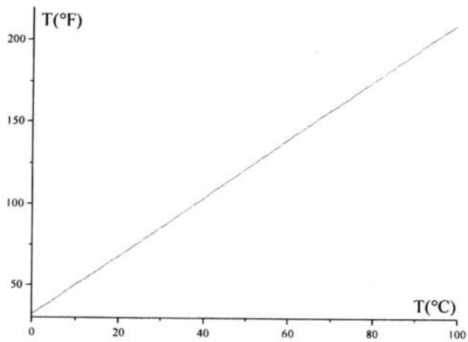


Figura 1.33. conversión de temperaturas.

Ejemplo:

Exprese el volumen V de una esfera en función de su área A.

Solución:

El área de una esfera es:

$A = 4\pi r^2$.

El volumen es:

$V = (4/3)\pi r^3$.

Como queremos el volumen en función del área, despejamos r de la fórmula del área:

$r = (A/4\pi)^{1/2}$

y sustituimos en la fórmula para el volumen:

$V = (4/3)\pi (A/4\pi)^{3/2} = (1/6)(A^3/\pi)^{1/2}$.

Ejemplo:

Un campo petrolero que tiene 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo. Por cada nuevo pozo que se perfora, la producción diaria de cada pozo disminuye en 5 barriles. Escribir la producción diaria p del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforen. Construir una gráfica de p(x) y usarla para encontrar el valor de x que maximiza a p.

Solución:

Podemos hacer una tabla que nos diga lo que va pasando conforme se agregan pozos nuevos. Sea N el número total de pozos, x el número de nuevos pozos, b el número de barriles que produce cada pozo y p(x) el número total de barriles que se producen:

$10\,x^2 < 2.5.$

Resolviendo esta desigualdad se tiene que:

$x^2 < 0.25$

$|x| < 0.5$

$-0.5 < x < 0.5.$

Recordando la restricción inicial, finalmente tenemos que:

$0.2 \leq x < 0.5.$

Ejemplo:

La relación entre las escalas de temperaturas de Celsius y la de Fahrenheit es lineal. Si se sabe que 0° C corresponde a 32° F, y que 100° C corresponde a 212° F, represente en forma algebraica y visual la temperatura en grados Fahrenheit como función de la temperatura en grados Celsius.

Solución:

Como la relación entre ambas escalas es lineal, buscamos la fórmula de transición entre ellas como la ecuación de una recta:

$(y - y_0) = m(x-x_0).$

En este caso y será la temperatura en grados Fahrenheit y x será la temperatura en grados Celcius. La ecuación queda entonces como:

$(T(°F) - 32) = m\,(T(°C) - 0),$

donde m es la pendiente, que se puede encontrar por medio de:

$m = (212°F - 32°F)/(100°C - 0°C) = 180°F/100°C = 9°F/5°C$

Entonces:

$T(°F) = (9°F/5°C)T(°C) + 32°F$

y la gráfica es la siguiente.

N	x	b	p(x)
20	0	200	4000
21	1	195	4095
22	2	190	4180

En esta tabla se ve que la producción total p(x) es el producto de N por b. Pero N es simplemente 20 + x. Por otra parte, b es 200 - 5x, de manera que se obtiene para p(x):

$p(x) = (20 + x)(200 - 5x) = -5x^2 + 100x + 4000.$

Para la gráfica manipulamos el polinomio de la siguiente manera:

Primero sacamos el -5 como factor común:

$p(x) = -5(x^2 - 20x - 800)$

Ahora completamos un cuadrado dentro del paréntesis:

$p(x) = -5(x^2 - 20x + 100 - 900) = -5(x^2 - 20x + 100) + 4500 = -5(x - 10)^2 + 4500$

De este modo, sabemos que la gráfica es la de una parábola recorrida 10 unidades a la derecha, estirada 5 veces, invertida y subida 4500 unidades. La gráfica pues, es la siguiente:

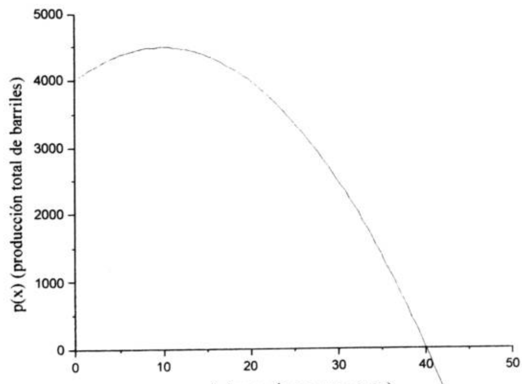


Figura 1.34. Relación entre producción y número de pozos nuevos perforados.

Y de la gráfica se ve que la producción máxima es de 4500 pozos, lo cual se alcanza cuando se perforan 10 nuevos pozos.

Ejercicios 1.6:

1) La fórmula para la expansión de una varilla metálica sujeta a cambios pequeños de temperatura es:

$\ell - \ell_0 = a\ell_0(T - T_0)$,

en donde ℓ es la longitud del objeto a la temperatura T, ℓ_0 es la longitud inicial del objeto a la temperatura inicial T_0, y a es una constante que depende del tipo de metal. a) Expresar ℓ como función lineal de T. Encontrar la pendiente y la intersección con el eje y. b) Supóngase que se tiene una varilla con longitud inicial de 100 cm a 20°C fabricada con un metal con $a = 10^{-5}$ cm/°C. ¿Qué longitud tendrá a los 90°C? c) ¿Cuál es la temperatura máxima que puede tener para no deformarse más de 0.01%?

2) Una fábrica tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradores diarios. Los gastos fijos de la planta son de $20000, el material y mano de obra para producir un refrigerador es de $1500. Escribir una fórmula para el costo total C de producir x refrigeradores al día.

3) Una caja rectangular tiene 120 cm^3 de volumen y una base cuadrada de longitud x en su arista. Expresar el área A de la caja como función de x. Si x está entre 10 y 15 cm, ¿qué valores puede tomar el área de la base?

4) Un rectángulo tiene 100 cm^2 de área. Expresar su perímetro P como función de la longitud x de su base. Si x está entre 8 y 12 cm, ¿qué valores puede tomar el perímetro?

5) Un rectángulo cuyo perímetro fijo es 36 gira en torno a uno de sus lados x para generar un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de este cilindro en función de la longitud x del lado sobre el que giró.

6) Un aeroplano utiliza una cantidad fija de combustible para despegar, una cantidad fija (diferente) para aterrizar, y una cantidad fija (diferente) por milla cuando está en el aire. ¿Cómo depende la cantidad total de combustible requerido, de la longitud del viaje? Escribir una fórmula para la función involucrada. Explicar el significado de las constantes que aparecen en la fórmula.

7) Una agencia de renta de automóviles cobra $260 diarios por el alquiler de un automóvil, más $4.50 por km recorrido. a) Escribir una fórmula para el costo total de la renta por día. b) Si se renta un carro por un día, ¿Cuántos km se podrían recorrer por $ 2000?

8) Un avión que vuela a una altitud de 6 millas y con una velocidad (constante) de 650 mi/h pasa por una estación de radar en el instante $t = 0$. a) Expresar la distancia horizontal d recorrida por el avión (en millas) como función de t, para $t \geq 0$. b) Expresar la distancia s entre el avión y la estación de radar, como función de d. c) Expresar la distancia s ahora como función de t.

9) Un recipiente para almacenamiento en forma de prisma rectangular con la parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material

para la base cuesta \$12 el metro cuadrado y el material para los lados cuesta \$16 el metro cuadrado. Expresar el costo del material como función del ancho de la base.

10) De acuerdo a la ley de Boyle, la presión p (en libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (en pulgadas cúbicas) de cierto gas satisfacen la condición $pv = 800$. ¿Cuál es el rango de valores posibles de la presión, dado que $100 \leq v \leq 200$?

11) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 10 m, expresar el área A de la ventana en función de su ancho x.

12) Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 8 m, expresar el área A(x) de la ventana en función de su ancho x.

13) En un triángulo rectángulo de base $b = 10$ y altura $h = 6$, está inscrito un rectángulo. Expresar el área de dicho rectángulo A como función de su base x. (Sugerencia, ubicar al triángulo en un sistema de coordenadas, con los catetos en los ejes)

14) Un tractor cuesta \$ 120 000 y cada año se devalúa 8% de su precio original. Encuentre una fórmula para el valor V del tractor después de t años.

15) En cierto lugar se cobra impuesto sobre la renta del modo siguiente: Si se gana hasta \$6000 no se paga impuesto. De más de \$6000 a \$13000 se paga el 10%. Mas de \$13000 se paga el 15%. Representar esta función en forma gráfica, teniendo como abscisa la cantidad ganada y como ordenada la cantidad pagada.

16) Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 96ft/s, por lo que su altura t segundos después es $y = 96\,t - 16\,t^2$ ft. a) Determinar la máxima altura que alcanza la pelota construyendo una gráfica de y como función de t. b) Encontrar el intervalo de tiempo durante el cual la pelota está a más de 48 pies del suelo.

17) El aire seco al moverse hacia arriba se expande y se enfría a razón de aproximadamente 1°C por cada 100m de elevación, hasta cerca de 12 km. a) Si la temperatura del suelo es de 25°C, escriba una fórmula para la temperatura a una altura h. b) ¿Qué rango de temperaturas debe esperarse si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

Modelos matemáticos

Un modelo matemático es una descripción por medio de una función o ecuación de un fenómeno del mundo real. En la física e ingeniería constantemente surge la necesidad de modelar un fenómeno para comprender y de ser posible, hacer predicciones acerca de su comportamiento futuro.

Para crear un modelo hace falta identificar las variables de las cuales depende el fenómeno y hacer algunas suposiciones respecto a la dependencia de unas con otras. Frecuentemente es necesario introducir simplificaciones, ya que el fenómeno puede depender de tantas variables que el estudio se vuelva extremadamente dificil.

En la realización de modelos se necesitan datos, los cuales se consiguen a través de experimentación (o encuestas u otras formas de investigación, dependiendo del fenómeno específico), así como herramientas matemáticas como las que se estudian en este libro. Por ejemplo, frecuentemente al hacer una gráfica con ciertos datos obtenemos una curva que nos sugiere una forma funcional específica. Si esto es así, es posible hallar una ecuación que vincule a las variables.

Para ver si el modelo es acertado, después de encontrar una forma funcional adecuada, es necesario hacer cálculos para valores intermedios entre los datos disponibles y ver si se obtienen resultados congruentes. A esto se le llama *interpolación*. También se hacen predicciones para rangos de valores fuera de los datos disponibles, para hacer predicciones en aquellos rangos. A esto se le llama *extrapolación*. La precisión de lo obtenido en interpolación y extrapolación nos da idea de qué tan bueno es nuestro modelo y nos permite mejorarlo y ampliarlo a diferentes condiciones, dependiendo de los datos disponibles y de las condiciones en que se desarrollen las mediciones. Frecuentemente para ajustar un modelo a un experimento, es necesario hacer algún cambio de variable que nos dé una recta, la cual será más fácil de ajustar que algún polinomio; a esto se le llama *linealización*.

Ejemplo:

En un experimento se observa que un balín que cae libremente recorre las siguientes distancias (en centímetros) para los intervalos de tiempo (en segundos) dados.

d	0	5	20	44	78	122
t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

En base a los datos anteriores, buscar un modelo para este fenómeno.

Solución:

Si graficamos los datos disponibles tendremos la siguiente figura:

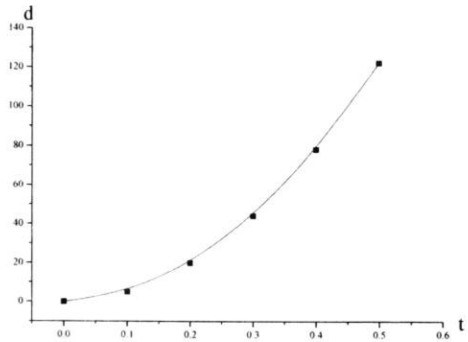


Figura 1.35. Curva que describen los datos.

que se asemeja a una parábola. Para determinar si es acertada esta conjetura, se puede calcular un renglón aparte con los cuadrados de los tiempos (redondeando a una cifra decimal, como están dados los datos originales) como se ve enseguida:

d	0	5	20	44	78	122
t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$z = t^2$	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25

Si hacemos ahora una gráfica de d vs z, vemos que es factible ajustar una línea recta.

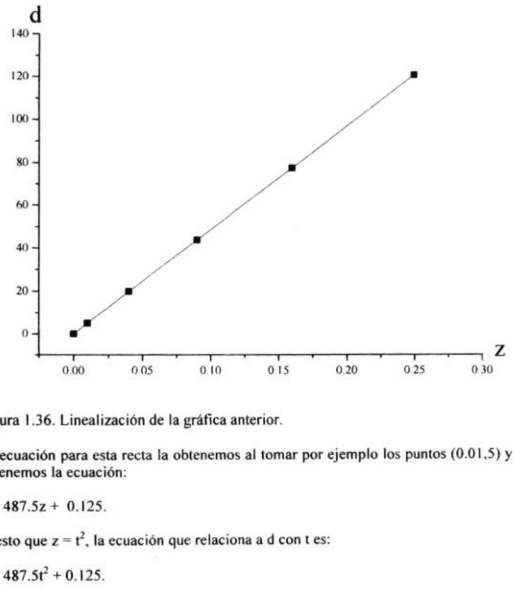


Figura 1.36. Linealización de la gráfica anterior.

La ecuación para esta recta la obtenemos al tomar por ejemplo los puntos (0.01,5) y (0.25,122). De estos puntos obtenemos la ecuación:

$d = 487.5z + 0.125.$

Puesto que $z = t^2$, la ecuación que relaciona a d con t es:

$d = 487.5t^2 + 0.125.$

Ejercicios 1.7:

1) Para el siguiente conjunto de datos, p es el peso (en gramos) de una masa que se cuelga a un resorte, mientras que x es la longitud (en centímetros) que se mide del resorte en cada caso. Encontrar el modelo que mejor represente este conjunto.

p	0	10	20	30	40	50
x	5	7	9	11	13	15

2) En este caso x es la longitud (en centímetros) de un cuadrado de vidrio y p es su precio (en pesos). Hallar el modelo para p como función de x.

x	10	20	30	40	50
p	4	16	36	64	100

3) Aquí x es la longitud (en centímetros) de un alambre de nicromel e i es la corriente (en amperes) que pasa a través de él.

x	i
20	0.032
30	0.022
40	0.016
50	0.013
60	0.011
70	0.010

Sugerencia: Hacer el cambio de variable $z = 1/x$ y graficar i vs. z.

4) En este problema, i es la intensidad (en lúmenes) de luz recibida desde un punto a la distancia d (en metros).

d	i
1.2	1
1	1.4
0.8	2.2
0.7	2.8
0.6	3.9
0.5	5.4

Sugerencia: Hacer el cambio de variable $z = 1/d^2$ y graficar i vs. z.

5) Para este caso, d es la distancia (en unidades astronómicas) de un planeta al Sol y t es el tiempo (en años) que tarda en dar una vuelta alrededor de él.

Planeta	d	t
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1	1
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón	39.507	248.350

Sugerencia: Hacer los cambios de variables $u = d^2$ y $v = t^3$, y grafique u vs. v. El resultado de este modelo es la tercera ley de Kepler.

Capítulo 2

Límites

Algunos procesos en el análisis de funciones nos llevan a la definición del límite. Estudiaremos el concepto de límite al tratar con la tangente a una curva y en el concepto de velocidad instantánea.

Tangentes

Para una circunferencia es muy fácil decir que una tangente es una recta que la toca en sólo un punto. Cualquier otra recta que la toque en dos puntos se le llama secante. También es muy fácil dar la pendiente de la recta tangente, sabiendo que siempre es perpendicular al radio que pase por el punto de tangencia.

Pero si tratamos de definir una tangente a otra clase de curva, nos encontramos con dificultades, pues una recta que sólo la corte en un punto puede no ser tangente sino secante, mientras que una tangente podría tocarla en más de un punto. Esto se ilustra en la siguiente figura.

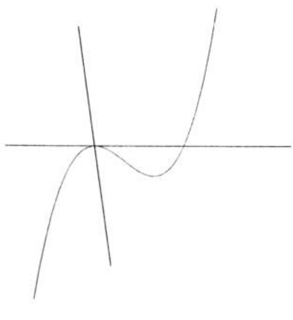


Figura 2.1. Curva con tangente que la corta.

Y por supuesto que al tratar de determinar la pendiente de la recta tangente, no tenemos un método fácil, puesto que esto dependerá de cada curva en particular.

Como una forma de aproximar la recta tangente a una curva en un punto, tomemos una secante a la curva en cuestión, y démosle al otro punto coordenadas cada vez más próximas a las del punto de tangencia. Conforme ambos puntos se acercan, vemos que el valor de la pendiente que calculamos se acerca a un cierto número. A este número es al que llamamos límite de este proceso.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto P(1,1).

Solución:

Para resolver este problema necesitamos hallar la pendiente de la recta tangente, por lo que es necesario tomar otro punto muy cercano a P, al que llamaremos Q. La pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q es:

$m_{PQ} = (x^3 - 1)/(x-1)$.

Donde Q puede estar antes o después de P. Por ejemplo, para $x = 0.5$ tendremos:

$m = [(0.5)^2 - 1]/[0.5 - 1] = 1.75$

mientras que para $x = 1.5$ tendremos que:

$m = [(1.5)^2 - 1]/[1.5 - 1] = 4.75$

A continuación una breve tabla de valores cercanos a 1 y las pendientes que resultan de ellos:

x	m	x	m
1.1	3.31	0.9	2.71
1.01	3.0301	0.99	2.9701
1.001	3.003001	0.999	2.997001
1.0001	3.0003	0.9999	2.9997

De ver esta tabla, se puede concluir que el valor más apropiado debe ser 3. En efecto es así, y la pendiente de la recta se toma como $m = 3$, con lo que la ecuación será:

$(y - 1) = 3(x - 1)$

$y = 3x - 2$

Al número 3 obtenido es al que llamamos límite.

Velocidades

En general, la velocidad de un móvil no es constante, sólo en casos excepcionales. Por esta razón se define la velocidad instantánea, es decir, la velocidad para cada momento. Para esto se calcula la velocidad promedio del instante en cuestión con otro instante cercano. De manera similar a como se hace para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva, la velocidad instantánea será la velocidad que nos resulte del límite de promediar para instantes cada vez más cercanos.

Ejemplo:

Galileo Galilei descubrió que si se deja caer un objeto desde cierta altura, la distancia d (en metros) que recorre a partir de ese punto está dada por:

$d(t) = 4.9\, t^2$.

donde t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde el momento que se dejó caer el objeto. La velocidad con que se mueve el objeto aumenta continuamente, por lo cual para cada instante de tiempo hay una velocidad diferente, a la que llamaremos velocidad instantánea.

Para calcular la velocidad instantánea en un instante dado t_0, tomamos la fórmula para la velocidad promedio:

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1},$$

y tomaremos valores de t cada vez más cercanos a t_0. Esto nos da:

$$v = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}.$$

Suponiendo que $t_0 = 5s$, tendremos una tabla como la siguiente:

t	v	t	v
5.5	51.45	4.5	46.55
5.1	49.49	4.9	48.51
5.01	49.049	4.99	48.951
5.001	49.0049	4.999	48.9951
5.0001	49.00049	4.9999	48.99951

De la tabla anterior, se ve que el mejor valor para la velocidad instantánea en el instante t = 5 debe ser v(t = 5 s) = 49 m/s.

Definición del límite

Decimos que la función f(x) tiene como límite a L cuando x tiende a a si podemos hallar un número muy pequeño $\varepsilon > 0$ para el cual existe otro número muy pequeño $\delta > 0$ que cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (1)$$

si

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad (2)$$

siempre y cuando

$$0 < |x - a| < \delta. \qquad (3)$$

Ejemplo:

Demostrar que :

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Solución:

De la anterior definición tenemos que:

$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ siempre y cuando $0 < |x - 3| < \delta$.

La primera desigualdad nos da:

$-\varepsilon < 4x - 5 - 7 < \varepsilon$

$-\varepsilon < 4x - 12 < \varepsilon$

$-\varepsilon/4 < x - 3 < \varepsilon/4$

que al sustituir en la segunda escrita en la forma:

$-\delta < x - 3 < \delta$

nos da:

$-\delta = -\varepsilon/4 < x - 3 < \varepsilon/4 = \delta$.

O sea que si nos dan cualquier ε, siempre habrá un δ igual a $\varepsilon/4$ que satisfaga ambas desigualdades, lo cual prueba que en efecto 7 es el límite buscado.

Ejemplo:

Hallar un número δ tal que:

$|(x^2 - 6x + 6) - 6| < 0.2$ siempre y cuando $|x - 6| < \delta$.

Solución:

Aquí $f(x) = x^2 - 6x + 6 = (x - 3)^2 - 3$. Poniendo esto en la definición de límite, tenemos que: $L = 0.2$, $f(x) = x^2 - 6x + 6$, $\varepsilon = 0.2$, y $a = 6$. O sea que lo que vamos a hacer es probar que :

$\lim\limits_{x \to 6} x^2 - 6x + 6 = 6$

dentro de la precisión dada por $\varepsilon = 0.2$. La primera desigualdad da:

$-0.2 < (x^2 - 6x + 6) - 6 < 0.2$

$6 - 0.2 < x^2 - 6x + 6 < 6 + 0.2$

$5.8 < f(x) < 6.2$

Para hallar los valores de x entre los cuales se cumple la anterior desigualdad, resolvemos las ecuaciones:

$5.8 = x^2 - 6x + 6$ y $6.2 = x^2 - 6x + 6$

lo cual nos da:

$x_1 \approx 5.966 = a - 0.034$ y $x_2 \approx 6.033 = a + 0.033$

Esto es, $\delta_1 = 0.034$ y $\delta_2 = 0.033$. Para el δ final tomamos el menor, o sea $\delta = 0.033$ y decimos que se cumple que:

$|(x^2 - 6x + 6) - 6| < 0.2$ siempre y cuando $|x - 6| < 0.033$.

Límites laterales

Lo dicho anteriormente sobre los límites vale cuando nos acercamos hacia a desde valores positivos igualmente que cuando nos acercamos desde valores mayores que a. Cuando nos acercamos a un punto (a,f(a)) tomando sólo valores menores que a, podemos hablar del límite lateral izquierdo de f(x):

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (4)$$

Donde el – nos indica que estamos acercándonos desde la izquierda. Si nos acercamos sólo desde valores mayores, tendremos el límite derecho de la función:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad (5)$$

Igual que antes, el signo más nos indica que nos acercamos desde la derecha.

Si al calcular los límites laterales éstos coinciden, el límite existe. De lo contrario, el límite no existe. En las funciones definidas por secciones es frecuente que existan los límites laterales, pero no sean iguales.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$$

Como los límites coinciden, decimos que:

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Solución:

Por la izquierda vemos que:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1$$

mientras que por la derecha:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite de f(x) cuando x tiende a 0.

Reglas para calcular límites

Los límites cumplen ciertas reglas, que serán muy útiles para calcular nuevos límites.

Si existen los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ entonces:

1 $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (6)

2 $\lim\limits_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (7)

3 $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (8)

4 $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x)$ {siempre que $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$} (9)

5 $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ (10)

6 $\lim\limits_{x \to a} 1 = 1$ (11)

7 $\lim\limits_{x \to a} x = a$ (12)

8 $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ (13)

9 $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (14)

10 $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)x} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ (15)

Estas reglas nos muestran que en los polinomios se pueden hallar los límites por sustitución directa, esto es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{16}$$

Esto mismo vale para las funciones racionales que no tengan alguna singularidad (cuando el denominador vale cero) o indeterminación (cuando hay cero en el numerador y denominador sinmultáneamente). Para las funciones racionales que al sustituir directamente obtengamos una indeterminación de la forma 0/0, debemos hacer un poco de álgebra que nos permita eliminar esa indeterminación.

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solución:

Como aquí al sustituir encontramos una indeterminación del tipo 0/0, hacemos un truco muy usual: factorizamos el numerador (observemos que éste es una diferencia de cuadrados), con lo cual:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Cancelando el factor común tanto en el numerador como en el denominador, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Ejemplo:

Calcular:

$$\lim_{h\to 2}\frac{h^3-8}{h^2-4}$$

Solución:

Aquí tenemos que hacer una doble factorización, pues en el numerador se tiene una diferencia de cubos mientras que en el denominador hay una diferencia de cuadrados. Con las fórmulas para cada caso se obtiene:

$$\lim_{h\to 2}\frac{h^3-8}{h^2-4}=\lim_{h\to 2}\frac{(h-2)(h^2+2h+4)}{(h-2)(h+2)}$$

cancelando factores comunes y sustituyendo:

$$\lim_{h\to 2}\frac{h^2+2h+4}{h+2}=3$$

Ejemplo:

Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

Solución:

Para límites de esta clase, es conveniente convertirlo en racional, para lo cual buscamos un común divisor de ambas raíces, que en este caso resulta ser $x^{1/6}$, por lo cual es recomendable hacer $y = x^{1/6}$, con lo cual el límite se convierte en:

$$\lim_{y \to 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4}$$

Esto ya se puede resolver como en el ejemplo anterior, con una doble factorización.

$$\lim_{y \to 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \to 2} \frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y \to 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = 3$$

Ejercicios 2.1:

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{2 + x}}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

4) $\lim\limits_{u \to -2} \dfrac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u + 2)(u - 3)}$

5) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

6) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^2 - 5y + 6}{y - 2}$

7) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

8) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$

9) $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 1}$

10) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 1}$

no quiere decir que el límite sí exista y sea $\pm\infty$. Reiteramos que ∞ sólo es un símbolo para decir que la cantidad puede aumentar indefinidamente.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x^2-6x+9} = -\infty.$$

Es posible definir límites infinitos izquierdos y derechos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} = \pm\infty$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

Si nos acercamos a $x = 5$ desde valores menores que 5, obtenemos valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto, por lo cual:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$$

mientras que si nos acercamos desde valores mayores que 5, obtenemos valores positivos arbitrariamente grandes, por lo cual:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \infty$$

A veces sucede que al hacer x tan grande como se desee (en valor absoluto), la función tiende a un límite. En estos casos se escribe:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad (18)$$

donde se entiende que si los valores de x se vuelven arbitrariamente grandes en sentido positivo, se dice que $x \to \infty$, mientras que si toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto, se dice que $x \to -\infty$. Por último, tenemos muchos casos en que al aumentar (o disminuir) indefinidamente el valor de x, el valor de la función aumenta o disminuye indefinidamente. Esto se representa con:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad (19)$$

Para evaluar estos límites, es muy útil usar las reglas siguientes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty \qquad \{n \text{ positivo}\} \qquad (20)$$

11) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-6x+8}$

12) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x+3}$

13) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$

14) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$

15) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$

16) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

17) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3-1}{t-1}$

18) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

19) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

20) $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Límites que involucran infinitos

Para algunas funciones hemos visto que no hay un límite, sino que el valor de la función aumenta su valor absoluto indefinidamente conforme x tiende hacia a. Esto se simplifica como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad (17)$$

donde el signo + se toma si la función toma valores positivos arbitrariamente grandes y el signo – si la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Esto

El signo se selecciona de acuerdo a los siguientes criterios: si n es par se usa el signo más; si n es impar pero x crece, el signo también es más. Pero si n es impar y x decrece, el signo es menos.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0 \qquad \{n \text{ positivo}\} \tag{21}$$

Ejemplo:

Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

Solución:

Para evaluar este límite, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia del denominador, en este caso, x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+1/x^2}{1+1/x^2}$$

con lo cual de inmediato vemos que el límite vale 1, pues los demás términos se hacen cero.

Ejemplo:

Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x+3}$

Solución:

Dividiendo entre x numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{1+3/x} = \infty.$$

Ejercicios 2.2:

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} 2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^2-5}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+5x^2-7}{10x^3-11x+5}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^{23}-7x^2+5}{2x^{23}+x^{22}}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{2x}$

11) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3-10}{x+5}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

15) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2}{x-3}$

16) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+4}{x^2+2x-3}$

17) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x+2}$

18) $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

19) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

20) $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

Continuidad de las funciones

Se dice que una función es continua en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{22}$$

Si una función no es continua en $x = a$, se dice que tiene una discontinuidad allí.

Una función es continua desde la izquierda si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \tag{23}$$

y desde la derecha si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \tag{24}$$

Una función es continua sobre un intervalo si es continua en todo número en el intervalo. Para los puntos extremos sólo hay continuidad por la izquierda o por la derecha. Cuando en una función definida por secciones existen los límites laterales pero no coinciden, se dice que tiene una discontinuidad de salto. En funciones en las que existe el límite en a, pero f(a) no está definida, se puede redefinir la función en a como f(a) para volverla continua. En tales ocasiones decimos que hay una discontinuidad removible en a. Si hay una discontinuidad en a y no existe el límite de la función en a, hablamos de una discontinuidad esencial.

Gráficamente la continuidad de una función se ve si podemos dibujar la curva de un solo trazo, o sea, sin necesidad de despegar el lápiz (pluma, gis, etc). En funciones definidas por secciones, puede haber o no continuidad dependiendo de si existen y coinciden los límites laterales para cada sección de la función.

Ejemplo:

La función $f(x) = 1/x^3$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, puesto que no existe el límite de la función cuando x tiende a cero.

Ejemplo:

La función:

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ 1+x & x\geq 0\end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto en x = 0, pues los límites laterales no coinciden (el límite izquierdo vale cero y el derecho vale uno).

Ejemplo:

La función $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ tiene una discontinuidad removible en x = 3, pues los límites laterales coinciden (valen ambos seis), pero la función no está definida en x = 3. Pero si redefinimos la función como:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 6 & x=3\end{cases}$$

la función será continua en x = 3.

Si f(x) y g(x) son continuas en x = a, también lo son:

1 $(f\pm g)(x)$ (25)

2 c f(x) (26)

3 (f g)(x) (27)

4 (f/g)(x) {siempre y cuando $g(x)\neq 0$) (28)

De aquí se deduce que:

a) los polinomios son continuos en todos los reales.

b) Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.

c) Las funciones irracionales son continuas en todo su dominio.

Para las funciones compuestas se cumple que si f(x) es continua en b y:

$$\lim_{x\to a} g(x)=b, \tag{29}$$

entonces:

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=f(b) \tag{30}$$

O sea que si g(x) es continua en a y f(x) es continua en g(a), entonces (f o g)(x) = f [g(x)] es continua en a. Esto indica que una función continua de otra función continua es también función continua.

Ejemplo:

Sea la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\leq 3 \\ 4-x^2 & -3<x<1 \\ ax+b & x\geq 1 \end{cases}$$

Hallar los valores de las constantes a, b y c que hacen que f(x) sea continua en su dominio.

Solución:

Para resolver este problema debemos saber el valor de los límites de la sección que sí está bien definida, en los extremos del intervalo. Esto nos dirá cuales son los valores de los límites que debe asumir la función en las secciones restantes al acercarse a los mismos valores que limitan dicho intervalo:

Si $x \to -3$, $(4-x^2) \to -5$. Si $x \to 1$, $(4-x^2) \to 3$. Esto implica que:

$\lim_{x\to -3} ax + b = -5$ y $\lim_{x\to 1} ax + b = 3$

Esto permite establecer las ecuaciones siguientes sustituyendo el límite por el valor de la función (puesto que la función en cuestión es un polinomio):

$-5 = a(-3) + b$ y $3 = a(1) + b$.

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que:

$a = 2$ y $b = 1$.

Teorema del valor intermedio

Si f es continua en el intervalo [a,b] y N es un número entre f(a) y f(b), entonces existe un número c entre a y b tal que f(c) = N. Esto es fácil de ver gráficamente en la figura de la página siguiente.

El teorema establece que existe un número, pero no condiciona a que sea único. Puede haber dos o más números que cumplan la condición. Pero si no hay ninguno, es porque no se cumplieron las condiciones del teorema, por ejemplo, puede ser que la función no sea continua, o que el intervalo no sea cerrado.

Esto tiene gran utilidad para hallar raíces de ecuaciones. En tal caso N = 0, por lo que f(a) < 0 y f(b) > 0. Para hallar raíces, debemos hacer que a y b estén lo más cerca posible, pero no dejen de cumplir la condición de que f(a) es negativo y f(b) es positivo.

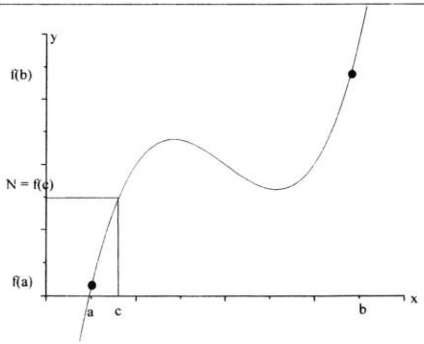


Figura 2.2.Teorema del valor intermedio.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Aproximar una raíz en el intervalo [1,2] con un error menor que 1/4.

Solución:

Primero verifiquemos que el cero está entre los extremos:

$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = -1$

$f(2) = (2)^3 - 4(2) + 2 = 2.$

Se verifica que N = 0 está entre f(1) y f(2). Para aproximar la raíz, partiremos el intervalo sucesivamente en mitades, y nos quedaremos con aquellos intervalos que contengan a c con una precisión de 1/4, o sea que buscaremos que f(c) esté entre –1/4 y 1/4:

$f(3/2) = -5/8.$

Como es negativo, c está entre 3/2 y 2, por lo que al partir el intervalo nuevamente, etc:

$f(7/4) = 23/64.$

$f(13/8) = 107/512 \approx 0.21 < 1/4.$

O sea que la raíz buscada está próxima a x = 13/8.

Comportamiento asintótico

Cuando tenemos límites del tipo:

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

observamos que la función se pega cada vez más a la recta x = a, pero nunca la toca. A esta recta se le llama asíntota vertical de la curva y = f(x). También es asíntota aunque sólo exista uno de los límites laterales.

Si tenemos un límite del tipo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \tag{31}$$

la función se pega cada vez más a la recta y = L. A esta recta se le llama asíntota horizontal de f(x). También en estos casos se pueden tener asíntotas aunque sólo exista el límite superior o el límite inferior.

A veces la función se pega a una recta que no es ni horizontal ni vertical, sino que tiene una ecuación del tipo y = mx + b (está inclinada). Para hallar la ecuación de la recta se usan las fórmulas siguientes:

$$m = \lim_{x\to\infty} [f(x)/x] \tag{32}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] \tag{33}$$

Cuando tenemos límites de la forma:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \tag{34}$$

resulta muy útil saber de qué forma crece (o decrece) la función conforme crece el valor de x. Esto se logra si observamos la forma funcional que no se hace cero al calcular el límite. Con esto sabremos que la función crece (decrece) pegándose cada vez más a la función encontrada, aunque no se trate de una línea recta, como es el caso de lo que llamamos asíntotas. A la función hallada podemos considerarla como una curva asíntota de la función que se está examinando.

Ejemplo:

Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4}$

Solución:

Para las asíntotas verticales, observemos que pasa en los puntos en que el denominador se hace cero, esto es, en x = ± 2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = 1/4$$

O sea que sólo en x = 2 hay asíntota vertical. Para las asíntotas no verticales (horizontales o inclinadas), veamos el comportamiento de la función cuando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1+3/x+2/x^2}{1-4/x^2} = 1$$

De donde resulta que en y = 1 hay una asíntota horizontal.

Ejemplo:

Hallar las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Solución:

Como en x = 0 el denominador se hace cero, la recta x = 0 es asíntota vertical. Para las asíntotas no verticales hacemos:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to \infty} [x + 2 - 1/x] = \infty$$

Vemos que no hay asíntotas horizontales. Sin embargo, puede haber asíntotas inclinadas, pues vemos que la expresión resultante se comporta en forma lineal. Para hallar los parámetros de la recta hacemos:

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x\to \pm\infty} (y-x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x-1-x^2}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right) = 2.$$

por lo tanto, la ecuación de la asíntota es:

$y = x + 2.$

Lo visto en este capítulo nos permite ampliar la gama de funciones cuyo comportamiento podemos analizar tanto gráficamente como algebraicamente, aumentando a lo aprendido en el capítulo anterior, lo relacionado a la continuidad y el comportamiento asintótico de las funciones.

Ejemplo:

Graficar la curva $y = \dfrac{1+x^{3/2}}{x-1}$.

Solución:

En primer lugar, vemos que la función no está definida para valores negativos de x, debido al término $x^{3/2}$. Esta función tiene un cero en el denominador en x = 1. Calculemos el límite para saber si hay asíntota:

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de una función continua en **R** - {-2, -1, 2}, que satisfaga lo siguiente:

f(3) = 0, f(0) = 0,

$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 4^-$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3^+$.

Solución:

Lo primero que conviene hacer es ubicar los puntos por donde estamos seguros que pasa la función, estos son, (3,0) y (0,0).

Luego de ello, vemos qué sucede cerca de los puntos de discontinuidad. Cerca de –2 la función está cerca de cero, lo cual nos dice que la función tiene una discontinuidad removible ahí. Cerca de –1 hay una asíntota que lleva a la función hacia abajo indefinidamente. Cerca de 2 también hay asíntota, la cual lleva a la función hacia arriba en la parte izquierda, mientras que en la derecha la trae desde abajo.

Por último, vemos que el comportamiento asintótico es tal que lleva a la parte negativa de la función hacia 3, desde valores mayores (o sea, desde arriba). Por otro lado, la parte positiva va hacia 4 desde valores menores (o sea, desde abajo).

Todo esto se ilustra en la siguiente gráfica:

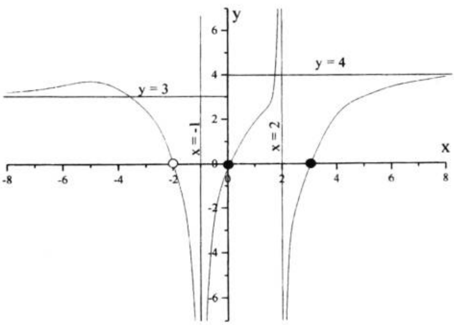


Figura 2.4. Función con asíntotas.

Ejercicios 2.3:

1) Determinar las ecuaciones de las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

2) Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función $g(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + x^{3/2}}{x - 1} = \pm\infty$$

así que vemos que en x = 1 hay una asíntota vertical. Siendo más cuidadosos, podemos ver que para valores menores que uno, tendremos cantidades negativas, por lo que antes de 1 vale el signo menos; mientras que para valores positivos tendremos cantidades positivas, por lo que después de 1 vale el signo más.

Para ver si hay asíntotas no verticales, hacemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^{3/2}}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1/x + x^{1/2}}{1 - 1/x} = \infty$$

De aquí se ve que no hay asíntotas horizontales ni inclinadas, y que la función se comporta asintóticamente como $x^{1/2}$. Además de la anterior información, vemos que f(0) = -1.

Para trazar la gráfica, podemos hacer primero la asíntota en x = 1, y como f(0) = -1, la función debe salir de y = -1. Para la otra parte, trazamos una curva que baje desde valores muy grandes como lo marca la asíntota, y para completar, trazamos una recta que se "pegue" a $y = x^{1/2}$ a valores cada vez mayores de x. Esto se ve enseguida:

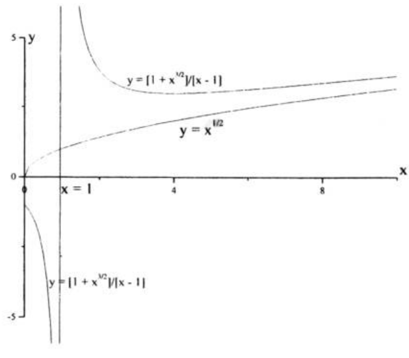


Figura 2.3. $f(x) = \dfrac{1 + x^{3/2}}{x - 1}$.

Ejemplo:

El número de calculadoras N(p) que puede vender una compañía manufacturera a un precio de p pesos por unidad, está dado por $N(p) = 500/p^2$. Encontrar $\lim_{p \to 0} N(p)$ e interpretar el resultado.

Solución:

$$\lim_{p \to 0} N(p) = \lim_{p \to 0} 500/p = \infty$$

Como ya se ha reiterado a lo largo de este texto, el símbolo ∞ no es un número, sino un símbolo. Esto lo que quiere decir en relación con el problema planteado es que no habrá límites en el número de unidades que pueda vender la compañía si cada vez son más baratas.

3) Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4}$, obteniendo: raíces, asíntotas, puntos de discontinuidad y su clasificación. Justifique todas sus respuestas.

4) Hacer un esbozo gráfico de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

5) Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 1}}$, determinar:

a) dominio y rango
b) raíces
c) ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales
d) puntos de discontinuidad y su clasificación
e) gráfica

6) Para la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$ determinar: dominio y raíces, intervalos de continuidad y su clasificación, asíntotas; y hacer un esbozo de su gráfica.

7) Dar una raíz aproximada para $f(x) = -x^5 + 3x - 1$, con una precisión de 0.25.

8) Dar una raíz aproximada para la función $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$, cuya exactitud sea de 0.1.

9) Bosquejar la gráfica de una función f(x) continua en todos los números reales, excepto en {-5, -1, 4}, la cual satisfaga:

$\lim_{x \to 4} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

$f(-7) = -2$

$f(1) = 5$

$f(7) = -2$

10) Dibujar la gráfica de una función continua en **R** - {-1, -4, 4, 6}, la cual tenga discontinuidades esenciales en x = -1 y x = 6 y discontinuidades removibles en x = -4 y x = 4.

11) Calcular los valores de A y B para que la función sea continua en todos los números reales

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 1 & x \le -2 \\ x^2 + B & -2 \le x \le 2 \\ 4/x & x \ge 2 \end{cases}$$

12) Determinar los valores de a, b y c para que la función sea continua en todos los números reales

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \le -1 \\ ax^2 + b & -1 \le x \le 2 \\ 2x - 3 & x \ge 2 \end{cases}$$

13) Un equipo médico de investigación estableció que la masa M(t) de un tumor, como función del tiempo t al cual el paciente es expuesto a radiación durante el tratamiento, está dado por

$$M(t) = \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 6},$$

en donde M(t) está en miligramos y t en segundos. Debido al mal funcionamiento de los aparatos utilizados es imposible exponer al paciente exactamente por tres segundos de terapia de radiación. ¿Qué valor se debe dar a M(3), a fin de que M(t) sea una función continua?.

Capítulo 3

Derivación

En el análisis de la variación de las funciones será muy útil el concepto de derivada. Ya nos hemos acercado a la definición de esta cantidad al buscar ecuaciones de tangentes y velocidades instantáneas. Ahora formalizaremos esto.

Tangentes

Si una ecuación tiene la ecuación y = f(x) y queremos hallar la pendiente de la recta tangente a ella en el punto P(a,f(a)), entonces consideramos un punto cercano Q(x,f(x)) con $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la secante:

$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (1)$$

A continuación hacemos tender x hacia a, lo cual nos dará:

$$m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (2)$$

Ejemplo:

Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 2$ en el punto P(1,0).

Solución:

La pendiente de la recta estará dada por:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{(2x^2-2)-(2(1)^2-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x^2-2)}{x-1} = 2\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2\lim_{x \to 1}(x+1) = 4$$

Con esto la ecuación de la recta será:

$(y - 0) = 4\,(x - 1)$

$y = 4x - 4$

Velocidades instantáneas

Para la velocidad instantánea, examinaremos la caída libre de un cuerpo. Supongamos que un cuerpo cae libremente por la acción de la gravedad. El cuerpo se va moviendo cada vez más rápido y en cada momento el cuerpo tiene una velocidad bien definida diferente. Si el cuerpo se mueve desde una posición s hasta una posición s + Δs, al transcurrir un intervalo de tiempo Δt, la velocidad promedio es la razón entre Δs y Δt:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3}$$

Si inicialmente el cuerpo estaba en reposo, la distancia recorrida (en metros) por el cuerpo es $4.9\ t^2$ * (con t en segundos), con lo cual la velocidad promedio como función del tiempo únicamente será:

$$\langle v \rangle = \frac{4.9(t+\Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t}. \tag{4}$$

Ahora bien, si el cuerpo en cuestión se mueve cada vez más rápido, veremos que el calcular el promedio anterior en un intervalo de tiempo pequeño (por ejemplo, una décima de segundo) puede dar resultados muy diferentes que los que se obtendrían en un intervalo de tiempo mucho mayor (digamos, 5 segundos). Esto quiere decir que para tener una buena medida de la velocidad instantánea es necesario promediar en intervalos de tiempo cada vez menores. Esto finalmente nos lleva a tomar hacer tender a cero el intervalo de tiempo, y tomar el límite correspondiente como definición de velocidad instantánea:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9(t+\Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t}, \tag{5}$$

que en este caso nos lleva a lo siguiente:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 4.9t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9.8t\Delta t + 4.9\Delta t^2}{\Delta t}. \tag{6}$$

* Históricamente, el desarrollo de las ideas del cálculo está estrechamente ligada a las ideas del movimiento. En la época dorada de Atenas, Aristóteles sostenía que los cuerpos caían con velocidades proporcionales a la masa de cada cuerpo. Este concepto permaneció intacto durante la era romana y también en la edad media, donde el oscurantismo que gobernaba dictó que las doctrinas de Aristóteles eran leyes divinas.

En la época renacentista, Galileo fue la punta de lanza en el estudio de la física (llamada en aquel entonces filosofía natural), introduciendo el método experimental para aportar conocimientos, a diferencia de los métodos puramente filosóficos de Aristóteles. Para estudiar la caída libre de un cuerpo, Galileo diseñó rieles inclinados que "menguaban" la aceleración de la gravedad. La razón de esto es que la caída libre era muy rápida para una época en que los tiempos muy cortos eran extremadamente difíciles de medir. Con el plano inclinado Galileo encontró que las distancias recorridas en caída por un riel inclinado, para intervalos iguales de tiempo, estaban en proporciones regulares: 1:3:5:7,etc. Cuando el plano estaba más vertical, las distancias aumentaban, pero las proporciones permanecían constantes, por lo cual Galileo concluyó que esta ley también debería ser válida para la caída libre.

Observando que los totales en cada caso daban una sucesión de números cuadrados (esto es: 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16, etc), Galileo concluyó que la distancia recorrida por un cuerpo en caída es proporcional al cuadrado del tiempo que le toma hacer ese recorrido, que es la ley que conocemos actualmente.

Manipulando este límite por medio de las reglas estudiadas en el capítulo 2, tenemos que:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 9.8t + 4.9\Delta t = 9.8t\,. \tag{7}$$

De este modo, la velocidad de un cuerpo que se deja caer desde el reposo es simplemente el producto del tiempo transcurrido por la cantidad constante 9.8, llamada aceleración de la gravedad, y representada con g.

Para el caso general en que se tenga otra ley para el desplazamiento del cuerpo en función del tiempo, se cumplirá que:

$$\langle v \rangle = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{8}$$

Con esto, podemos definir la velocidad instantánea como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \tag{9}$$

Ejemplo:

Hallar la velocidad instantánea en t = 5 de un cuerpo que cae desde el reposo:

Solución:

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(5+h)^2 - 4.9(5)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{49h + 4.9h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(49 + 4.9h) = 49.$$

Ejemplo:

Hallar la velocidad instantánea en t = 5 de un móvil que tiene la ley de movimiento siguiente:

$s(t) = 4t^2 + 2t - 7$

Solución:

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{[4(5+h)^2 + 2(5+h) - 7] - [4(5)^2 + 2(5) - 7]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{100 + 10h + h^2 + 10 + 2h - 110}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 12h}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 12) = 12$$

Razones de cambio

Si se tiene $y = f(x)$, y x cambia de x_1 a x_2, el incremento de x se escribe como:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{10}$$

y el incremento de y como:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \tag{11}$$

Al cociente de los incrementos le llamamos razón de cambio promedio y es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{12}$$

Y la razón de cambio instantánea es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{13}$$

Definición de derivada

Al límite siguiente:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \tag{14}$$

se le llama derivada de f(x) en el número a y se simboliza con la prima, pero también se usa la notación df(a)/dx = f '(a). Otra forma de escribirlo es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \tag{15}$$

Aunque ambas formas de escribir la derivada son equivalentes, a veces a la hora de calcular el límite puede resultar más conveniente una de las dos formas.

La derivada se puede interpretar como la pendiente de la tangente a la curva f(x) en el punto (a,f(a)). También se puede interpretar como la razón de cambio instantánea de y = f(x) con respecto a x cuando x = a. Si no fijamos el valor de x en a, la derivada es función de x, f'(x).

Ejemplo:

Derivar la función $f(x) = x^2$ en x = 1.

Solución:

La definición de derivada nos da:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(h + 2) = 2 .$$

Ejemplo:

Derivar la función $f(x) = x^3$.

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + h) = 3x^2$$

Reglas de derivación básicas

De las reglas para calcular límites se pueden deducir las siguientes fórmulas de derivación:

$$1 \quad \frac{dc}{dx} = 0 \tag{16}$$

$$2 \quad \frac{dx}{dx} = 1 \tag{17}$$

$$3 \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \tag{18}$$

$$4 \quad \frac{d[cf(x)]}{dx} = c\frac{df(x)}{dx} \tag{19}$$

$$5 \quad \frac{d[f(x) \pm g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} \tag{20}$$

Estas reglas son más o menos obvias (la 3 puede inferirse al extrapolar los resultados para n = 1, 2 y 3). Por ejemplo, es obvio que la derivada de una suma sea la suma de las derivadas, puesto que el límite de una suma es la suma de los límites. Pero en el caso de las reglas para el producto y el cociente las cosas son diferentes, por lo cual estudiaremos con cuidado esta cuestión.

Ejercicios 3.1:

Derivar las siguientes funciones:

1) $y = x^{12}$

2) $y = x^{-12}$

3) $y = x^{4/3}$

4) $f(x) = 1/x^4$

5) $f(x) = x^{1/4}$

6) $f(x) = x^{e}$

7) $y = 4x^{3/2} - 5x^{1/2}$

8) $y = 6x^3 + 4x^2 - 2x$

9) $y = 3t^2 + 12/t^{1/2} - 1/t^2$

10) $f(x) = 4/x^{2/3} - 3x^5 + 2x$

Derivación de productos de funciones

Supóngase que tenemos una función u(x) que consta del producto de dos funciones, f(x) y g(x) continuas. Entonces, al incrementarse el valor de x en Δx, la función u(x) se incrementa en:

$$\Delta u = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = (f + \Delta f)(g + \Delta g) - f\,g = f\,g + f\,\Delta g + g\,\Delta f + \Delta f\,\Delta g - f\,g =$$

$$= f\,\Delta g + g\,\Delta f + \Delta f\,\Delta g \tag{21}$$

que al dividir entre Δx nos da:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x} \tag{22}$$

y si hacemos tender Δx a cero, obtendremos:

$$\frac{du}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}. \tag{23}$$

El ultimo término se hizo cero porque se supuso que ambas funciones son continuas. En esta parte, así como en algunas otras posteriormente, no se escribió explícitamente la dependencia funcional con x de las funciones f(x) y g(x) con el fin de simplificar la escritura y sabiendo que no hay confusión posible en este contexto.

Para ilustrar la regla del producto supongamos que se tiene un rectángulo cuyas dimensiones de base y altura van aumentando con el tiempo. Es obvio que el área de este rectángulo va a aumentar. Sabemos que el área de un rectángulo de base b y altura a es:

$$A = ab. \tag{24}$$

Al transcurrir un intervalo de tiempo Δt, aumentará la base del rectángulo a $b + \Delta b$ y su altura a $a + \Delta a$, con lo que el área será ahora:

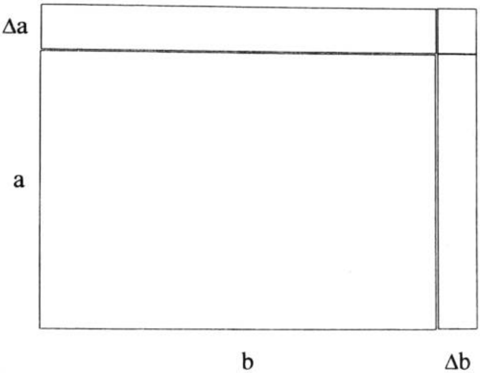


Figura 3.1. Cambios en el área de un rectángulo al cambiar las dimensiones del mismo.

$$A + \Delta A = (a + \Delta a)(b+\Delta b) = ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b. \tag{25}$$

Y el promedio de la razón de cambio del área en el tiempo será:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(ab + a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b) - ab}{\Delta t} = \frac{a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b}{\Delta t}. \tag{26}$$

Con esto, la derivada con respecto al tiempo de el área será:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a\Delta b + b\Delta a + \Delta a\Delta b}{\Delta t} = a\frac{db}{dt} + b\frac{da}{dt}. \tag{27}$$

Esto es lo que se obtendría al derivar la función A(t) usando la regla del producto enunciada. Obsérvese en la figura 3.1 que la razón de cambio está dada por los rectángulos laterales, ya que conforme Δt tiende a cero, el rectángulo más pequeño desaparece.

Ejemplo:

Derivar la función $y = x^{5/3}(1 + x^2)$

De acuerdo a la regla tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = x^{5/3}\frac{d}{dx}(1+x^2) + (1+x^2)\frac{d}{dx}(x^{5/3}) = x^{5/3}(2x) + (1+x^2)\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = \frac{11}{3}x^{8/3} + \frac{5}{3}x^{2/3}$$

Ejercicios 3.2:

Derivar las funciones siguientes:

1) $f(x) = 8x\,(2x^2 - 3)$

2) $y = (t^3 + 5t^2 + t)(t^2 - 7t + 2)$

3) $f(x) = (12x^3 - 4x)(x^{2/3} + 5x)$

4) $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

5) $f(x) = x\,(2x - 1)(3x + 2)$

6) $y = (5x - 3x^4)(2 - x^2)(3x - 6)$

7) $y = (2x^{1/3} - 4x^{-1/3})(5x^{5/2} + 3x^{7/2} - 2x^{3/7})$

8) $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 8)\,(x^3 + 2x - 1)$

9) $y = (9x^8 - x^4 + x)(3x - 6x^7 + 5x^{11})$

10) $y = (5x^{6/5} + 4x^{8/3})(5x^{1/7} - 7x^{-1/3})(9x^{5/6} + 4x^{7/11})$

Derivación de cocientes de funciones

Sabiendo la regla para derivar productos, es fácil obtener la fórmula para cocientes de funciones. En efecto, si tenemos una función v(x) que consta del cociente de dos funciones f(x) y g(x), ambas continuas, se cumple que:

$$v(x)\,g(x) = f(x) \tag{28}$$

derivando a f(x) obtendremos que:

$$v\frac{dg}{dx} + g\frac{dv}{dx} = \frac{df}{dx} \tag{29}$$

despejando a dv/dx, que es la que nos interesa obtenemos:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} - v\frac{dg}{dx}}{g} = \frac{\frac{df}{dx} - \frac{f}{g}\frac{dg}{dx}}{g} \tag{30}$$

simplificando, obtenemos la regla:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'g-g'f}{g^2} \tag{31}$$

Ejemplo:

Derivar la función $y = [3x - 2]/[x^2 + 1]$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-2)\frac{d}{dx}(x^2+1)+(1+x^2)\frac{d}{dx}(3x-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x^2+1)-2x(3x-2)}{(1+x^2)^2}=\frac{-3x^2+4x+3}{(1+x^2)^2}$$

Ejercicios 3.3:

Derivar:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

2) $y=\dfrac{x-1}{x^{1/3}}$

3) $y=\dfrac{x^2+1}{2x+8}$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{5x^2+7x-2}$

5) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{7x-6}$

6) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-6}$

7) $y=\dfrac{(x+5)(4x^2+5x)}{(2x+6)(x-1)}$

8) $y=\dfrac{(x-9)(2x+8)}{(2x-3)(x-7)}$

9) $y=\dfrac{(3x^2-8)(x^2+6x+11)}{(5x^2-15x-12)(-8x^2+11)}$

$$10)\ y = \frac{(3x^3 + 5x^2 + 11x + 19) + (18x^3 + 11x^2 - 36x + 41)}{(-6x^3 - 25x^2 - 21x + 2) - (11x^3 - 9x^2 + 12x + 11)}$$

Regla de la cadena

Cuando tenemos una función compuesta, se cumple que w(x) = (f o g)(x) = f[g(x)]. Para derivar notamos que al incrementarse el valor de x en Δx:

$$\Delta w = f(g + \Delta g) - f(g) \tag{32}$$

$$\Delta f = g(x + \Delta x) - g(x)$$

al tender a cero Δx, también tiende a cero Δg, entonces:

$$\lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta g} = \frac{dw}{dg} \tag{33}$$

Entonces la razón $\Delta w/\Delta g$ difiere de la derivada con respecto a g por una cantidad pequeña, digamos α:

$$\frac{\Delta w}{\Delta g} = \frac{dw}{dg} + \alpha \tag{34}$$

esta cantidad α tiende a cero si Δx tiende a cero. Entonces el incremento de la función w es:

$$\Delta w = \frac{dw}{dg}\Delta g + \alpha\ \Delta g \tag{35}$$

que al dividir entre Δx se vuelve:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dg}\frac{\Delta g}{\Delta x} + \alpha\ \frac{\Delta g}{\Delta x} \tag{36}$$

y al hacer tender Δx a cero nos da:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{37}$$

ya que el ultimo término se hace cero (como ya se había dicho).

Así pues, la derivada de una función compuesta es el producto de las derivadas de las funciones que la componen:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{38}$$

Ejemplo:

Derivar la función $y = \sqrt[3]{x^2 + 8x + 11}$

Solución:

De acuerdo a la regla se tendría:

Notemos que $\sqrt[3]{x^2 + 8x + 11} = [x^2 + 8x + 11]^{1/3}$, con lo cual:

$$y'(x) = \frac{1}{3}[x^2 + 8x + 11]^{-2/3}\frac{d}{dx}(x^2 + 8x + 11) = \frac{1}{3}\frac{2x + 8}{[x^2 + 8x + 11]^{2/3}}$$

Para ilustrar la regla de la cadena consideremos un círculo cuyo radio crece con el tiempo, esto es, $r = r(t)$. Obviamente que el área de este círculo crece también, pero no precisamente en la misma forma. Para hallar el área de un círculo usamos la fórmula:

$$A = \pi r^2, \tag{39}$$

y si el radio cambia en una fracción Δr, el cambio en el área será:

$$\Delta A = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(2r\Delta r + \Delta r^2), \tag{40}$$

y con esto la razón de cambio en el tiempo es:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \pi\frac{2r\Delta r + \Delta r^2}{\Delta t}, \tag{41}$$

así que la derivada será:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \pi\frac{2r\Delta r + \Delta r^2}{\Delta t} = \pi r\frac{dr}{dt} \tag{42}$$

que es lo que se obtendría al derivar con la regla de la cadena.

En la siguiente figura se muestra la relación hallada entre las variables que intervienen en el área del círculo.

Nótese de lo hallado en este caso que la velocidad a que crece el área del círculo es el producto entre su perímetro ($2\pi r$) y la velocidad a que está creciendo el radio (dr/dt). Esto nos indica que si en la figura el aro de grosor Δr se hace cada vez más delgado, como caso límite se tendría una cáscara que apenas rodea al círculo dado. La velocidad a que crece el área es pues la velocidad a que se van acumulando cáscaras al círculo.

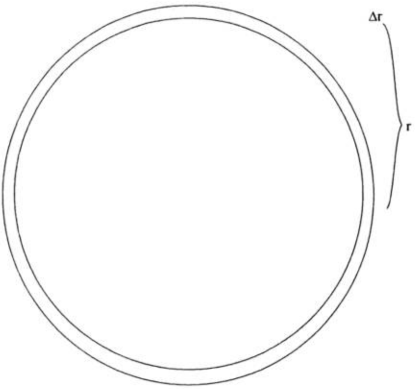


Figura 3.2. Circunferencia que crece con el tiempo.

Ejercicios 3.4:

Derivar:

1) $f(x) = (x + 1)^{99}$

2) $y = (x^{1/2} + 1)^{100}$

3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

4) $f(x) = (x^5 + 1)^{12}(x^2 + 3)^6$

5) $f(x) = (x - 1)^{12}(1 - 6x)^{2/3}$

6) $f(x) = (x^2 + 3x)(1 - 2x)^9$

7) $y = [x^3 + (2x - 1)^3]^3$

8) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1-x}}$

9) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

10) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+6x+8}{11-5x-3x^2}}$

Derivación implícita

A veces no se tiene una forma explícita de la función, como y = f(x), sino que se tiene una expresión en forma de ecuación en la cual no es fácil despejar a la variable dependiente como función de la variable independiente. En tales casos es más conveniente hallar la derivada en forma implícita, como función de x y y, no sólo como función de x. Para esto se derivan ambos miembros de la ecuación, utilizando la regla de la cadena cada vez que se encuentre a la variable dependiente, y finalmente despejando a la derivada en la expresión obtenida.

Ejemplo:

Hallar la derivada de y con respecto a x en la siguiente función implícita:

$x^2 + y^2 - 36 = 0$

Solución:

Derivando con respecto a x tendríamos que:

$2x + 2yy' = 0$

Despejando:

$y' = -x/y$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto (3,3).

Solución:

Para hallar la pendiente, derivamos implícitamente:

$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$

Agrupando:

$y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$

Despejando:

$$y' = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

entonces, $m = \dfrac{6(3)-3(3)^2}{3(3)^2-6(3)} = -1$

y la ecuación será:

$(y-3) = -1\,(x-3)$

$y = -x + 6$

Ejercicios 3.5:

Hallar dy/dx en las siguientes funciones implícitas:

1) $2x - 3y + 8 = 0$

2) $y^2 = 4px$

3) $x^3 + y^3 = a^3$

4) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

7) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

8) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

9) $x^4y^5 = 3x^2 - 2xy$

Hallar la ecuación de la recta tangente a cada curva en el punto dado:

10) $y^2 = x^3(2-x)$ $(1,1)$

11) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ $(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$

12) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ $(3,1)$

13) $x^2y^2 = (y+1)^2(4 - y^2)$ $(0,-2)$

14) $y^2 = 5x^4 - x^2$ $(1,2)$

Derivadas de orden superior

Es claro que la derivada es una nueva función de x. Esto tiene como implicación que esta nueva función se puede volver a derivar. Cuando se deriva a la derivada de una función f(x), hablamos de la *segunda derivada* de f(x). Como esta segunda derivada también es una función de x, se puede volver a derivar y obtendremos la *tercera derivada*, etc. A estas se les llama derivadas de orden superior. El orden de la derivada es el número ordinal con que la nombramos, y al escribirlas se simbolizan como:

$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(iv)}(x), f^{(v)}(x), \ldots, f^{(n)}(x).$

donde n es el orden de la derivada. El paréntesis superior es para evitar confundir el orden de una derivada con una potencia.

Ejemplo:

Hallar la quinta derivada de $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Solución:

$y' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$y'' = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$

$y''' = 60x^2 + 24x + 6$

$y^{(iv)} = 120x + 24$

$y^{(v)} = 120$

La no existencia de la derivada

Para ciertas funciones puede suceder que no exista la derivada en algunos puntos. Esto puede suceder en tres casos específicos:

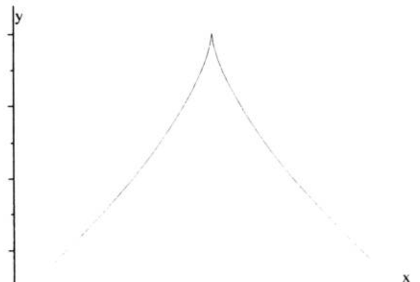


Figura 3.3. Función con una esquina, que vuelve a la derivada discontinua.

1 La función tiene una "esquina". En este caso es imposible decidir cuál es la recta tangente, pues muchas rectas lo podrían ser. En este caso no hay derivada porque los límites laterales que definen a la derivada no coinciden. Esto se ilustra en la figura 3.3, donde se ve que no existe derivada en x = 0.

2 La recta tangente es vertical. En este caso su pendiente no está definida, y los límites laterales tienden a más o menos infinito. Esto se ilustra en la siguiente figura: en x = 0 la pendiente está indefinida.

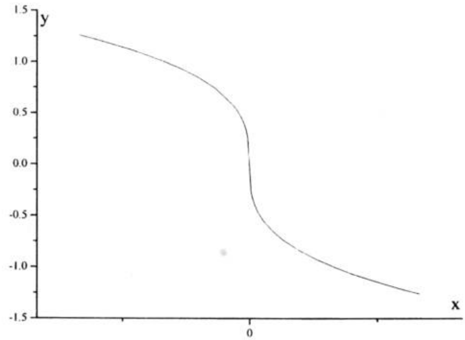


Figura 3.4. Función con tangente vertical en x = 0.

3 La función tiene una discontinuidad. En ese caso no puede existir la derivada, sea la discontinuidad de cualquier tipo. En efecto, si la discontinuidad es esencial, la pendiente de la recta tangente tampoco está definida. Pero también sucede que en una discontinuidad de salto los límites laterales están definidos pero no coinciden. Y aun en el caso que haya una discontinuidad removible, los límites existen y coinciden, pero no puede haber tangencia a un punto inexistente. Esto se ve en la siguiente gráfica: en x = 1 no hay derivada porque hay una discontinuidad.

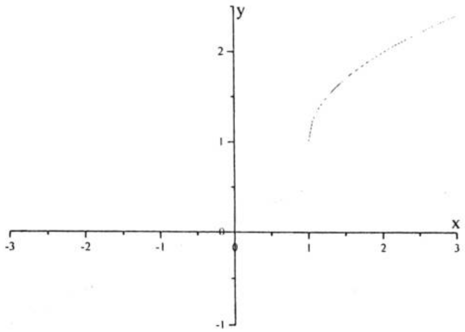


Figura 3.5. Función discontinua con derivada discontinua.

Así como es importante conocer el dominio y rango de una función, es importante saberlo para la derivada. Esto no dará gran información sobre la derivada, pero también sobre la función misma.

Capítulo 4

Aplicaciones de la derivada

Las derivadas se aplican en muchas ramas de la ciencia e ingeniería. Para esto, es necesario formular el problema en forma de función, y a continuación aplicar los métodos estudiados en capítulos anteriores.

Monotonía

Cuando una función es creciente, su derivada es positiva en todo el intervalo de crecimiento. Lo opuesto también es cierto: si en un intervalo la derivada de una función es positiva, podemos estar seguros de que en ese intervalo la función es creciente.

Por el contrario, si una función es decreciente, su derivada es negativa. Entonces si la derivada de una función es negativa en cierto intervalo, podemos estar seguros de que la función es decreciente en tal intervalo.

Esto tiene gran utilidad en el análisis de la variación de las funciones.

Ejemplo:

Hallar los intervalos de monotonía de la función:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Solución:

La derivada de la función es:

$f'(x) = 6x - 2$

Para hallar el intervalo en que es creciente, resolvemos la desigualdad:

$6x - 2 > 0$

$x > 1/3$

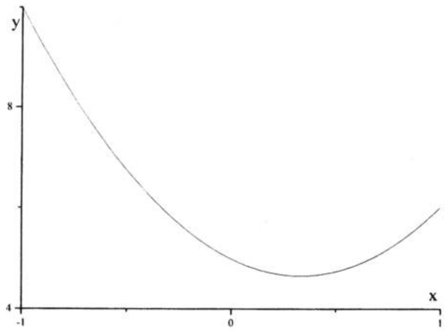
O sea que la función es creciente en:

$(1/3,\infty)$

y es decreciente en el intervalo:

$(-\infty,1/3)$

Esto se ve en la siguiente gráfica:



Concavidad

Cuando una función es creciente a una razón cada vez mayor o decreciente a una razón cada vez menor, vemos que su gráfica se "curvea" hacia arriba. Por el contrario, si crece a una razón cada vez menor o decrece a una razón cada vez mayor, su gráfica se "curvea" hacia abajo. A este modo en que se "curvea" la gráfica de una función se le llama concavidad. Para una función que se "curvea" hacia arriba, se dice que es cóncava hacia arriba. Si la función se "curvea" hacia abajo, se dice que es cóncava hacia abajo. Cuando una función es cóncava hacia abajo, su segunda derivada es negativa; si la función es cóncava hacia arriba, la segunda derivada es positiva.

Ejemplo:

Hallar los intervalos de concavidad de la función siguiente:

$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

Solución:

$y' = 6x^2 - 6x + 1$

$y'' = 12x - 6$

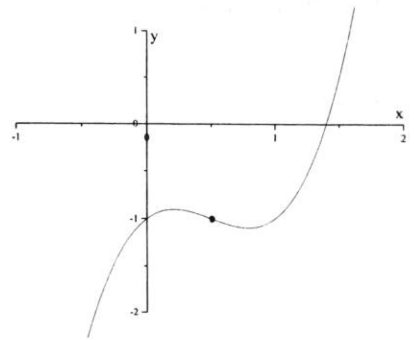
Para hallar concavidad hacia arriba resolvemos la desigualdad:

$12x - 6 > 0$

$x > 1/2$

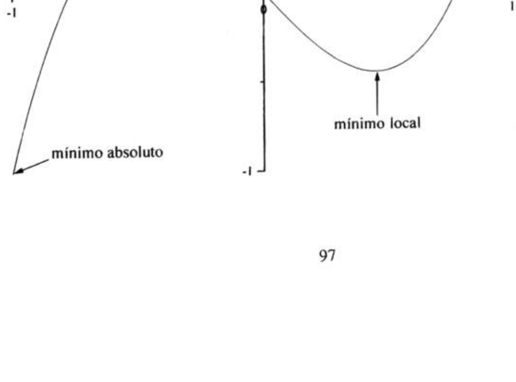
O sea que la función es cóncava hacia arriba en $(1/2,\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1/2)$

Esto se ve en la siguiente gráfica:



Máximos y mínimos

Una función puede tener máximos y mínimos absolutos y máximos y mínimos locales. La diferencia entre absolutos y locales se establece diciendo que el máximo absoluto es el mayor valor que adquiere la función en el dominio en cuestión y el mínimo absoluto es el menor valor en dicho dominio. Los máximos locales son aquellos que superan los valores de la función para valores cercanos, y similarmente para los mínimos locales. En la siguiente figura se muestran valores máximos y mínimos tanto absolutos como locales de una función.



Para funciones cuya derivada existe en todo su dominio sucede que en los puntos en que hay máximos y mínimos locales la derivada vale cero. Sin embargo, lo opuesto no siempre es cierto, pues a veces la derivada puede ser cero en un punto y sin embargo no haber máximo ni mínimo. A estos puntos se les llama puntos de inflexión.

A los puntos en que la derivada se vuelve cero, se le llama *puntos críticos*. También se usa este término para los puntos en que la derivada no existe. Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, esto es, clasificarlos como máximos, mínimos o puntos de inflexión, se puede estudiar lo que sucede en las vecindades del punto crítico, o se puede utilizar el criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad: si la concavidad es hacia abajo, claramente hay un máximo; si la concavidad es hacia arriba, hay un mínimo; y si no hay concavidad, hay un punto de inflexión. Esto se resume en la forma siguiente:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en a

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en a.

En funciones continuas, los máximos o mínimos absolutos pueden coincidir con los máximos o mínimos locales. Cuando no es así, se encuentran en los extremos del dominio de definición; de tal forma que para hallar máximos o mínimos absolutos es suficiente comparar los valores de la función en los extremos de su dominio, con los de los máximos y mínimos locales. Para funciones que son continuas pero no son continuamente derivables se puede decidir sobre la existencia de máximos o mínimos locales a partir de evaluar la función en los puntos en que no existe la derivada, o a partir de una gráfica.

Ejemplo:

Hallar los máximos y mínimos locales y absolutos de la función:

$f(x) = 6x^4 + x^3 - 5x^2 + 0.5 \qquad -1 \leq x \leq 1$

Solución:

La derivada de esta función es:

$f'(x) = 24x^3 + 3x^2 - 10x \qquad -1 \leq x \leq 1$

Las raíces de esta función son (aproximando a seis decimales):

$x(24x^2 + 3x - 10) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -0.711016$

$x_3 = 0.586016$

Para decidir sobre su naturaleza, hallamos la segunda derivada:

$f''(x) = 72x^2 + 6x - 10 \qquad -1 \leq x \leq 1$

y evaluamos en los puntos críticos hallados:

$f''(0) = -10 < 0$,

o sea que en $x = 0$ hay un máximo local.

$f''(-0.711016) = 22.133054 > 0$,

o sea que en $x = -0.711016$ hay un mínimo local

$f''(0.586016) = 18.241958 > 0$,

o sea que en $x = 0.586016$ hay un mínimo local.

Para hallar los máximos o mínimos absolutos, hallamos los valores de la función en los extremos de su dominio y es los puntos donde hay máximos o mínimos locales:

$f(-1) = 0.5$

$f(1) = 2.5$

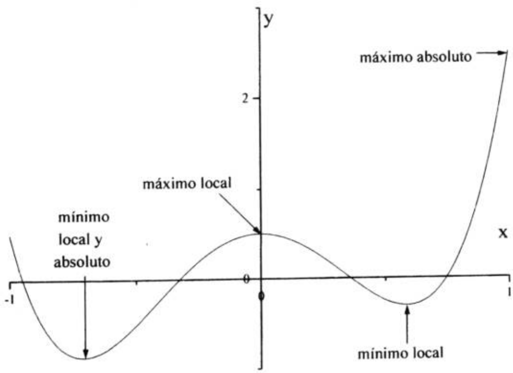
$f(0) = 0.5$

$f(-0.711016) = -0.853722$

$f(0.586016) = -0.308225$

Así que, como el mayor de estos valores es el de $f(1)$, este es el máximo absoluto. También vemos que el menor de estos valores es el de $f(-0.711016)$, entonces este es el mínimo absoluto, que en este caso coincide con un mínimo local.

Todo esto se puede ver en la siguiente gráfica:



Ejemplo:

Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función:

$y = 1 - x^{2/3}$ $\qquad -8 \leq x \leq 1$

Solución:

La derivada de la función es:

$y' = -(2/3)x^{-1/3}$ $\qquad -8 \leq x \leq 1$

Podemos observar que la derivada no tiene raíces, por lo cual no obtenemos puntos críticos de esta forma. Pero también notamos que en x = 0 no existe la derivada, por lo cual vamos a examinar lo que pasa con la función ahí, además de ver lo que pasa en los extremos del intervalo de definición:

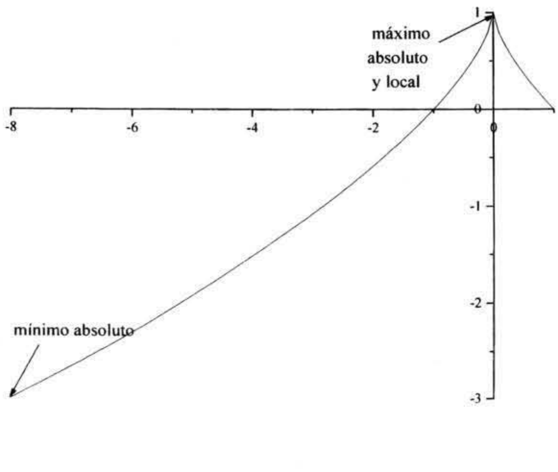
f(-8) = -3

f(0) = 1

f(1) = 0

Entonces el mínimo absoluto está en x = -8, y el máximo absoluto en x = 0. De ver que hacia la derecha del 0 la función decrece, deducimos que el máximo absoluto es también un máximo local.

Esto se ve en la siguiente gráfica:



Análisis de la variación de las funciones

Lo anteriormente aprendido nos permite hacer el análisis de la variación de las funciones estudiando el comportamiento de sus derivadas primera y segunda. Sumado esto a lo aprendido anteriormente relacionado con las traslaciones, alargamientos y compresiones, comportamiento asintótico, etc. podemos dibujar la gráfica de cualquier función con gran facilidad.

Ejemplo:

Graficar la función siguiente:

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

Solución:

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f''(x) = 12x - 18$

Los puntos críticos se hallan al igualar a cero la primer derivada y resolver:

$6x^2 - 18x + 12 = 0$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4(6)(12)}}{12}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Para saber la naturaleza de estos puntos críticos, evaluamos la segunda derivada en esos valores de x:

$f''(1) = 12(1) - 18 = -6 < 0,$

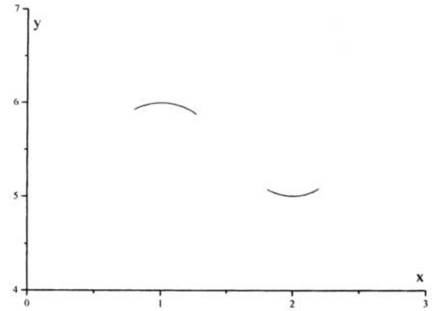
$f''(2) = 12(2) - 18 = 6 > 0,$

por lo que en $x = 1$ hay un máximo, mientras que en $x = 2$ hay un mínimo. Al evaluar a la función en los mismos valores de x obtenemos:

$f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) + 1 = 6$

$f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) + 1 = 5$

Esto se puede usar para la gráfica de la forma siguiente: en los puntos hallados graficamos pequeñas curvas que representen máximos y mínimos:



Por otra parte, se analiza la segunda derivada para hallar los intervalos de concavidad:

$12x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3/2$

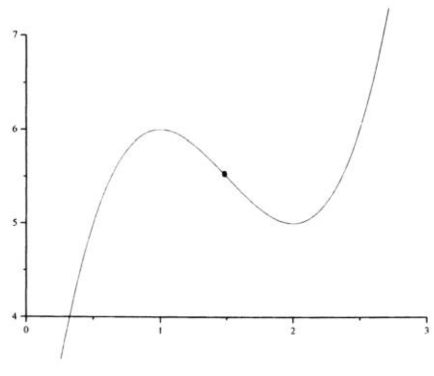
$12x - 18 > 0 \Rightarrow x > 3/2$

$12x - 18 < 0 \Rightarrow x < 3/2$

Entonces, en $(-\infty,3/2)$ la función es cóncava hacia abajo, en $(3/2,\infty)$ es cóncava hacia arriba, y en $x = 3/2$ hay un punto de inflexión. Evaluando a $f(x)$ en $x = 3/2$:

$f(3/2) = 2(3/2)^3 - 9(3/2)^2 + 12(3/2) + 1 = 11/2 = 5.5$

Con esto podemos completar la gráfica colocando el punto $(3/2,11/2)$ y unimos esto a lo anterior, respetando la dirección de concavidad:



Con lo cual concluimos este problema.

Ejemplo:

Analizar la variación de la siguiente función y graficarla:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Solución:

En primer lugar, notemos que la función es impar, pues al sustituir x por -x obtenemos -f(x). De este modo, será suficiente con analizar lo que sucede con el dominio positivo y luego extender esto al dominio negativo. Para valores positivos de x, y toma valores positivos siempre. La única raíz es $x = 0$.

El denominador nunca se vuelve cero, por lo que no hay asíntotas verticales. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal, puesto que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Al derivar obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

y la segunda es:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos la ecuación:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0, \Rightarrow 1 - x^2 = 0, \Rightarrow x = \pm 1.$$

Sustituyendo $x = 1$ en la segunda derivada nos da:

$$f''(1) = \frac{2(1)((1)^2-3)}{((1)^2+1)^3} > 0,$$

lo que indica que en $x = 1$ hay un máximo. Su ordenada la obtenemos al sustituir en la función original:

$$f(1) = \frac{(1)}{(1)^2+1} = \frac{1}{2}.$$

Entonces en $(1,1/2)$ está el máximo.

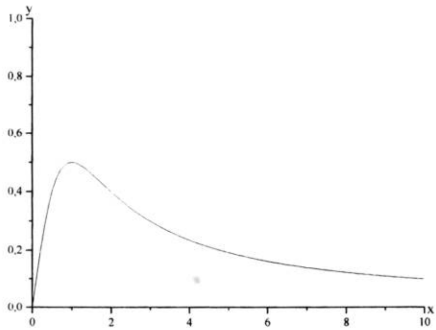
Para ver si hay puntos de inflexión resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0, \Rightarrow 2x(x^2 - 3), \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{3}.$$

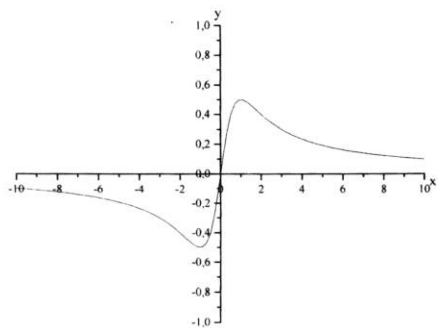
En $x = \sqrt{3}$ hay un punto en que cambia la concavidad. Como antes de él, en $x = 1$, la concavidad es hacia abajo, después de él la concavidad será hacia arriba. La ordenada de este punto es:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433\cdot$$

Con toda esta información podemos hacer una gráfica como la siguiente:



Y como sabemos que la función es impar, completamos la parte donde el dominio es negativo:



Ejemplo:

Analizar la variación de la función:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x}$$

Solución:

En primer lugar vemos que el dominio son todos los reales, y notamos que no hay paridad, por lo que debemos hacer el análisis de la función para todos los valores del dominio. Las raíces de la función son x = 0, x = 1. entre estos valores la función es negativa, y fuera de este intervalo la función es positiva.

Al derivar la función obtenemos:

$$y' = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}},$$

y la segunda:

$$y'' = \frac{6(x^2-x)-(4x-2)}{9\sqrt[3]{(x^2-x)^5}}.$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos:

$$y' = 0 = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}},$$

lo cual nos da el punto crítico x = 1/2. Al sustituir en la segunda derivada hallamos:

$$y''(1/2) = \frac{6((1/2)^2-(1/2))-(4(1/2)-2)}{9\sqrt[3]{((1/2)^2-(1/2))^5}} = 0.383 > 0,$$

por lo que en x = 1/2 hay un mínimo. Su ordenada es: $y(1/2) = \sqrt[3]{(1/2)^2 - (1/2)} = -0.623$.

Para los puntos de inflexión tenemos que resolver:

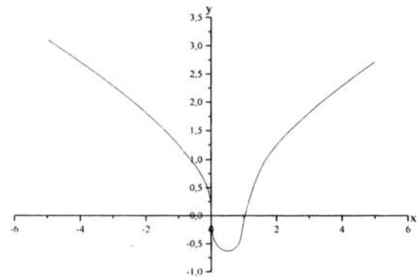
$$\frac{6(x^2-x)-(4x-2)}{9\sqrt[3]{(x^2-x)^5}} = 0,$$

lo cual nos da las raíces, $x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$, que definen los puntos de inflexión:

$p_1 = (0.232,-0.563)$, $p_2 = (1.434,0.854)$.

A la izquierda de p_1 la función es cóncava hacia abajo, entre p_1 y p_2 es cóncava hacia arriba, y a la derecha de p_2 es cóncava hacia abajo.

Todo esto nos da la siguiente gráfica:



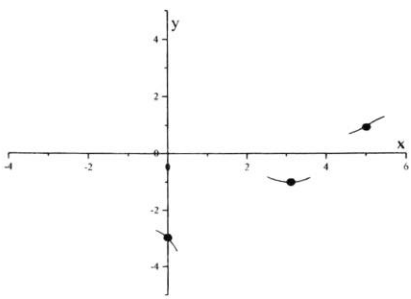
Ejemplo:

Dar un bosquejo de la gráfica de la función f(x) que cumple con los siguientes requisitos:

$f(0) = -3$, $f(3) = -1$, $f(5) = 1$,
$f'(x) > 0$ para $x < -2$, $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$, $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$, $f'(x) > 0$ para $x > 3$
$f''(x) > 0$ para $x < -2$, $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$, $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$, $f''(x) < 0$ para $x > 5$,
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$.

Solución:

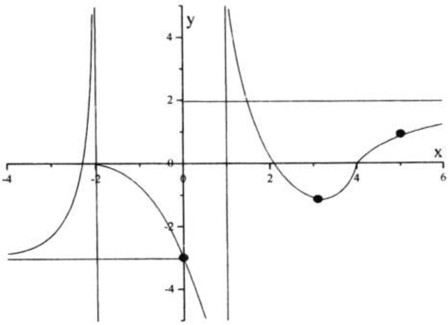
Los primeros tres requisitos nos dan tres puntos que podemos dibujar inmediatamente. Además vemos que en esos tres puntos la derivada es negativa, cero y positiva, respectivamente; mientras que la segunda derivada es negativa, positiva y cero (si la segunda derivada es continua). Por esto, además de los tres puntos dados, podemos dibujar parte de la curva en las vecindades, haciendo que cerca de (0,-3) la función sea decreciente y cóncava hacia abajo; cerca de (3,-1) haya un mínimo; y cerca de (5,1) sea creciente y haya un punto de inflexión, que lleva de concavidad hacia arriba a concavidad hacia abajo. Esto se ve en la siguiente figura:



Continuando con el análisis, vemos que antes de x = -2 la función es creciente, después de x = -2 y hasta x = 1 la función es decreciente, de x = 1 a x = 3 es decreciente y después de x = 3 es creciente.

También es fácil verificar que los límites establecen asíntotas en x = -2, x = 1, y = -3 y y = 2.

En la siguiente gráfica, se han dibujado las asíntotas halladas y se ha trazado la gráfica tomando en cuenta además que en x = 2 la función tiende a cero:



Ejercicios 4.1:

En los siguientes problemas, para cada función:

a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.

b) Halle los intervalos donde crece o decrece.

c) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.

d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

e) Use la información de los incisos anteriores para graficar f.

1) $f(x) = 1 + 2x$

2) $f(x) = 1 - x^2$

3) $f(x) = 1/x$

4) $f(x) = 1/x^2$

5) $f(x) = 2 - x^4$

6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

7) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2$

8) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$

9) $f(x) = x^2 + 2/x$

10) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

11) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

12) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

Razones de cambio relacionadas

A veces al estudiar las razones de cambio de algunas cantidades, la derivada que nos interesa tiene que calcularse a partir de la razón a que cambia alguna otra de las variables, que sí sabemos como cambia.

Al resolver problemas en los que intervienen razones de cambio relacionadas, es necesario conocer la relación entre las variables, a través de alguna fórmula o ecuación general. Esto es particularmente usual en problemas geométricos, por lo cual se aconseja repasar las principales fórmulas para hallar perímetros, áreas y volúmenes de la geometría elemental, así como las relaciones de semejanza. Algunos problemas también involucran conceptos de física que es necesario repasar, como velocidad, aceleración, etc. que se deben tener presentes durante el proceso.

Ejemplo:

Si una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, encuentre la razón a la cual disminuye el diámetro cuando es de 10 cm.

Solución:

Para hallar esto necesitamos hallar una relación entre el diámetro de la esfera de nieve y su diámetro. El área de una esfera de radio r es:

$A = 4\pi r^2$

entonces:

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

Por otra parte, el diámetro y el radio están relacionados por medio de:

$D = 2r$

entonces:

$$\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$$

Sabemos como dato que:

$$\frac{dA}{dt} = 1 \text{ cm}^2/\text{min}$$

Por regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$

Así que, despejando tendremos que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dA}{dr}} = \frac{1\text{cm}^2/\text{min}}{8\pi r} = \frac{1\text{cm}^2/\text{min}}{4\pi D}$$

finalmente:

$$\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt} = \frac{1\text{cm}^2/\text{min}}{2\pi D} \approx 0.015915 \text{ cm/min}$$

Ejemplo:

Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto. Uno viaja hacia el sur a 60 mi/h y el otro hacia el oeste a 25 mi/h. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

Solución:

Supongamos que el auto que va hacia el sur lo hace en la dirección negativa del eje y, y que el que va hacia el oeste lo hace en la dirección negativa del eje x. Las velocidades en cada dirección son las derivadas con respecto al tiempo de x y de y (con signo negativo, por la convención adoptada). Con esto, después de dos horas, cada uno estará en las posiciones:

$y = -120$ mi

$x = -50$ mi

y su distancia estará dada por:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-120)^2 + (-50)^2} = 130 \text{ mi}$$

su razón de cambio con respecto al tiempo será:

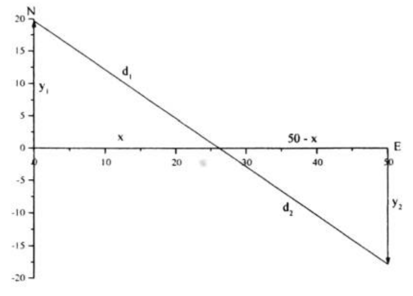
$$\frac{dD}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(-120mi)(-60mi/h) + (-50mi)(-25mi/h)}{130mi} = 65mi/h$$

Ejemplo:

Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 1 m/s desde un punto P. Cinco segundos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 1.2 m/s desde un punto a 50 m al este de P. ¿Con qué razón se separan 15 s después de que la mujer empezó a caminar?

Solución:

A los 20 s el hombre va a una distancia de 20 m al norte de su punto de partida, mientras que la mujer va a 18 m al sur de su punto de partida. A continuación el diagrama con las cantidades involucradas.



La distancia total es $D = d_1 + d_2$. La relación entre ésta y las cantidades dadas es:

$$D = \sqrt{x^2 + {y_1}^2} + \sqrt{(50-x)^2 + {y_2}^2},$$

que al derivarse con la regla de la cadena nos da:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y_1\frac{dy_1}{dt}}{\sqrt{x^2 + {y_1}^2}} + \frac{y_2\frac{dy_2}{dt} - (50-x)\frac{dx}{dt}}{\sqrt{(50-x)^2 + {y_2}^2}}.$$

En la ecuación anterior, sólo nos falta conocer x, para lo cual debemos hallar la ecuación de la recta que une a las dos personas y encontrar el punto en que atraviesa al eje de las abscisas. Para esto tomamos a y como la distancia vertical entre y_1 y y_2, que resulta ser $y = y_1 - y_2$.

$$(y + 18) = \frac{-18-20}{50-0}(x - 50) = -\frac{19}{25}x + 38$$

$$y = -\frac{19}{25}x + 20.$$

Cuando y = 0, x = 26.3. Para hallar la razón de cambio de x en el momento en cuestión, expresamos dx/dt en términos de dy_1/dt y dy_2/dt:

$$x = -\frac{25}{19}y + 26.3 = -\frac{25}{19}(y_1 - y_2) + 26.3,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{25}{19}\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right) = -2.89 \text{ m/s}.$$

Así pues, al sustituir, encontramos que:

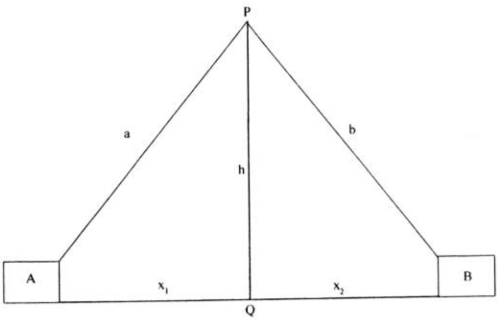
$$\frac{dD}{dt} = 4.72 \text{ m/s}.$$

Ejemplo:

Dos vagonetas, A y B, están conectadas por medio de una cuerda de 39 ft de largo que pasa sobre una polea P. El punto Q está en el piso 12 ft directamente debajo de P y entre las vagonetas. Se tira de la vagoneta A alejándola de Q a una velocidad de 2 ft/s. ¿Con qué rapidez se mueve la vagoneta B hacia Q en el instante en que A está a 5 ft de Q?

Solución:

En la figura siguiente se dan las cantidades involucradas.



Como es una sola cuerda, tendremos que a + b = 39 ft. Cada una de las cantidades a y b está relacionada con las otras cantidades así:

$$a = \sqrt{h^2 + x_1^2},$$

$$b = \sqrt{h^2 + x_2^2}.$$

Tendremos entonces que:

$$\sqrt{h^2 + x_1^2} + \sqrt{h^2 + x_2^2} = 39,$$

derivando:

$$\frac{x_1 \frac{dx_1}{dt}}{\sqrt{h^2 + x_1^2}} + \frac{x_2 \frac{dx_2}{dt}}{\sqrt{h^2 + x_2^2}} = 0,$$

y al despejar de aquí a $\frac{dx_2}{dt}$, nos resulta:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_1 \frac{dx_1}{dt} \sqrt{h^2 + x_2^2}}{x_2 \sqrt{h^2 + x_1^2}},$$

sustituyendo los valores (el valor de x_2 se obtiene de la suma de las raíces cuadradas), obtenemos:

$$\frac{dx_2}{dt} = -0.87 \text{ ft/s}.$$

Ejercicios 4.2:

1) Si V es el volumen de un cubo con longitud de arista x, encuentre dV/dt en términos de dx/dt.

2) Si A es el área de un círculo con radio r, encuentre dA/dt en términos de dr/dt.

3) Dos trenes parten de una estación con tres horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes dos horas después que partió el segundo tren?.

4) A mediodía, el velero A está a 150 km al oeste del velero B. El A navega hacia el este a 35 km/h y el B hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre las embarcaciones a las 4:00 P.M.?

5) Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 2 km a una velocidad de 800 km/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando aquél está a 4 km de ésta.

6) Un farol de una calle está montado en el extremo superior de un poste de 15 ft de alto. Un hombre cuya altura es de 6 ft se aleja del poste a una velocidad de 5 ft/s a lo largo de una trayectoria recta. ¿Con qué rapidez se mueve la punta de su sombra cuando el hombre está a 40 ft del poste?

7) Una lámpara proyectara situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia el edificio a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre el edificio cuando se encuentra a 4 m de éste?

8) Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h y la otra camina hacia el norte a 2 mi/h. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ambas después de 15 min?

9) Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 ft por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base a una velocidad de 24 ft/s. a) ¿A qué razón disminuye su distancia a la segunda base cuando está a la mitad de la distancia de la primera? b) ¿A qué razón aumenta su distancia a la tercera base en el mismo momento?

10) La altura de un triángulo crece 1 cm/min y su área 2 cm^2 /min, ¿Con qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área de 100 cm^2?

11) Se tira de un bote hacia un muelle por medio de una cuerda atada a la proa que pasa por una polea que está sobre el muelle 1 m más arriba que la proa. Si se tira de la cuerda a razón de 1 m/s, ¿con qué rapidez se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 8 m de éste?

12) Un avión vuela a una velocidad constante de 300 km/h, pasa sobre una estación de radar a una altitud de 1 km y asciende formando un ángulo de 30°. ¿Con qué razón aumenta la distancia del avión a la estación de radar 1 min más tarde?

13) El agua se fuga de un tanque cónico invertido a razón de 10 000 cm^3/min, al mismo tiempo que se bombea agua hacia el tanque con una razón constante. El tanque tiene 6 m de altura y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua sube a razón de 20 cm/min cuando la altura de ese nivel es de 2 m, encuentre la razón a la que se bombea el agua al tanque.

14) Una artesa de agua tiene 10 m de largo y una sección transversal en forma de trapecio isósceles cuyo ancho en el fondo es de 30 cm, el de la parte superior 80 cm y la altura 50 cm. Si la artesa se llena con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando ésta tiene 30 cm de profundidad?

15) Una piscina tiene 20 ft de ancho, 40 ft de largo y 3 ft de profundidad, en el extremo menos profundo, y 9 ft de profundidad en el más profundo, de modo que su sección transversal a lo largo es un trapecio. Si la piscina se llena a razón de 0.8 ft^3/min, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad en el punto más profundo es de 5 ft?

16) Se descarga grava desde un transportador de banda, a razón de 30 ft^3/min y su grosura es tal que forma una pila a manera de un cono cuyo diámetro en la base y su altura siempre son iguales. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pila cuando ésta tiene 10 ft de alto?

17) La ley de Boyle afirma que cuando se comprime una muestra de gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante, el volumen es de 600 cm3, la presión es de 150

kPa y ésta aumenta a razón de 20 kPa/min. ¿Con qué razón disminuye el volumen en este instante?

18) Cuando se expande aire adiabáticamente (sin ganar ni perder calor), su presión P y el volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante, el volumen es de 400 cm^3 y la presión es de 80 kPa y disminuye a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

Problemas de optimización

Lo aprendido sobre la teoría de máximos y mínimos nos permite resolver una gran cantidad de problemas en las ciencias e ingeniería. Siempre que tengamos un problema en el que nos interese hallar un máximo o un mínimo (por ejemplo, el máximo rendimiento, o el gasto mínimo) tenemos que formular el problema en forma de una función, derivarla e igualar a cero a fin de hallar los puntos críticos, y determinar qué clase de puntos críticos son, para elegir el que resuelva nuestro problema.

Ejemplo:

Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea a) máxima b) mínima?

Solución:

Supongamos que el trozo que se va a usar para formar el triángulo mide x metros. Entonces la parte que se usará para formar el cuadrado deberá medir 10 – x metros. Con esta forma de cortar el alambre, cada lado del triángulo mide x/3, y cada lado del cuadrado mide (10 – x)/4. La altura del triángulo será, luego de aplicar el teorema de Pitágoras, $h = \sqrt{3}\, x^2/6$.

El área del cuadrado será:

$$A_c = [(10 - x)/4]^2 = 25/4 - 5x/4 + x^2/16$$

el área del triángulo será:

$$A_t = \frac{\frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \sqrt{3}\, x^2/36 \approx 0.048$$

Por esto, el área total será:

$$A = 25/4 - 5x/4 + 0.11x^2$$

Derivando obtenemos:

$$\frac{dA}{dx} = 0.22x - 5/4$$

que al igualar a cero nos da:

$0.22x - 1.25 = 0$

$x = 1.25/0.22 = 5.68$

$A(5.68) = 2.7$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 0.22 > 0.$$

Esto indica que el punto crítico que hallamos es un mínimo. O sea que el área mínima es aquella en la que la varilla para el triángulo mide 2.7 m y la varilla para el cuadrado mide 7.3 m.

Para hallar el máximo, recordemos que este problema está definido únicamente para $0 \le x \le 10$. En los extremos de este intervalo la función tiene los valores:

$A(0) = 6.25$,

$A(10) = 4.75$,

Entonces, el máximo está en $x = 0$, o sea que el área máxima es aquella en la cual no hay triángulo, sólo hay cuadrado.

Ejemplo:

Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

Solución:

Para un círculo de radio r centrado en el origen, tenemos la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Como el rectángulo está inscrito, los vértices coinciden con cuatro puntos sobre la circunferencia. Para simplificar el problema, supondremos que los vértices son simétricos respecto a los ejes y el origen, esto es, que los vértices tienen las coordenadas:

$v_1 = (x_1,y_1)$, $v_2 = (x_1,-y_1)$, $v_3 = (-x_1,y_1)$, $v_4 = (-x_1,-y_1)$

Con esto, el área de tal rectángulo es:

$$A = (2x_1)(2y_1) = 4x_1y_1$$

Por otra parte, de la ecuación para la circunferencia obtenemos una expresión para y_1 en función de x_1:

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2}$$

con lo cual:

$$A = 4x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}$$

Derivando:

$$\frac{dA}{dx} = 4\sqrt{r^2 - x_1^2} + \frac{2x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}(-2x_1) = 4\sqrt{r^2 - x_1^2} - 4\ \frac{x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}.$$

Igualando a cero:

$$4\sqrt{r^2 - x_1^2} - 4\ \frac{x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} = 0$$

$$\sqrt{r^2 - x_1^2} = \frac{x_1^2}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}$$

$$r^2 - x_1^2 = x_1^2$$

$$x_1^2 = r^2/2$$

$$x_1 = r/\sqrt{2}$$

O sea que un rectángulo cuyo lado mida $2r/\sqrt{2}$ es el de mayor área. Conviene hacer notar que tal rectángulo, es un cuadrado.

Ejercicios 4.3:

1) Halle el punto de la recta $y = 2x - 3$ más cercano al origen.

2) Encuentre los puntos sobre la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que están más próximos al punto (2,0).

3) Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que pueda inscribirse en un círculo de radio r. (Sugerencia: coloque el círculo en un plano cartesiano con el centro en el origen y los lados iguales del triángulo simétricamente respecto al eje y; coloque el lado diferente hacia arriba; exprese la base y la altura del triángulo en términos del radio y de las coordenadas de cada punto)

4) Halle el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son de 3 cm y 4 cm, respectivamente, si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

5) Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

6) Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426\ T + 0.0085043\ T^2 - 0.0000679\ T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima. (Sugerencia: la densidad es el cociente de la masa entre el volumen)

7) El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial Discovery desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en t = 0 hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en t = 126 s, se expresa mediante

$v(t) = 0.001302\, t^3 - 0.09029\, t^2 + 23.61\, t - 3.083$

(en ft/s). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares. (Sugerencia: no olvide que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo)

8) La resistencia de una viga de madera es proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre el ancho de la viga más resistente que se puede sacar de un tronco de 16 cm de diámetro.

9) Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo). Si el perímetro de la ventana es de 10 m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz,

10) Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

11) Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

12) a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

13) Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta $100 por metro cuadrado. El material para los costados, $60 por metro cuadrado. Encuentre las dimensiones que deben usarse para tener el más barato de esos recipientes.

14) Se va a fabricar una lata cilíndrica con la tapa superior abierta. Para un volumen dado V, ¿cuánto debe medir el radio R a fin de que se use el mínimo de material?

15) Se quiere fabricar un tanque compuesto de un cilindro y dos semiesferas a los lados y que tenga capacidad para 1000 litros. ¿Cuánto deben medir el largo de el cilindro y el radio tanto del cilindro como de la esfera a fin de que se gaste el mínimo de material?

16) Un obrero debe fabricar un canal abierto en forma de prisma trapezoidal, de capacidad máxima. El fondo y los costados del canal deben medir 10 cm y los costados deben estar

igualmente inclinados respecto al fondo. ¿Cuál debe ser el ancho del canal en la parte superior?

17) En los extremos de una calle de un pueblo, que mide 2 km, hay dos fiestas con sonido que emiten ruido a volúmenes diferentes V_1 y V_2, con $V_2 = 4V_1$. Si la intensidad del sonido varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia, encuentre el punto entre las dos fiestas en que el escándalo será menor.

Apéndice

Respuestas a los ejercicios

Capítulo 1

Ejercicios 1.1 (Página 10)

1) $(-2/3,\infty)$ 2) $[2,3]$ 3) $(-4,0)\cup(1,\infty)$ 4) $(-2,2)$ 5) $(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

6) $(-\infty,0)\cup(1,3)$ 7) $[-2,2)$ 8) $[2,5]$ 9) $(-\infty,-1/3]$ 10) **R** 23) $(-\infty,12)$

11) $(0,7/3)$ 12) $(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$ 13) $(-\infty,-12]\cup[-2,\infty)$ 14) **R**-{-1} 15) $[-5.5, 2.5]$

16) ϕ 17) $(-3,-2)\cup(2,3)$ 18) $(2/3, 10/3)$ 19) $(-\infty,-3]\cup[0,1]$

20) $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$ 21) $(1, 3/2)$ 22) $(-0.1, 0.1)$ 23) $[-1.31, -1.29]$ 24) $(3/2, 6/5]$

25) $(-3,-1)\cup(-1,1/2)$ 26) $(-3, 2/3)$ 27) $(-\infty, -1)\cup(0,1)$ 28) $(1,\infty)$ 29) $(-1, 1)\cup(1,\infty)$

30) $(-\infty, -1)$ 31) $(-\sqrt{2},1)\cup(\sqrt{2},\infty)$

Ejercicios 1.2 (Página 13)

1) $x = 1, x = 4$ 2) $(3,7)$ 3) $(-\infty,-2]\cup[2/3,\infty)$ 4) $(-11,-5)$ 5) $(-\infty,0]\cup[6,\infty)$

6) $(-\infty,3]\cup[5,\infty)$ 7) $(5.9, 6.1)$ 8) $(-\infty,-7]\cup[-3,\infty)$ 9) $(-\infty,-4]\cup[2,\infty)$ 10) $[1.3, 1.7]$

11) $(-4/5, 8/5)$ 12) $(1.52, 1.68)$ 13) $[0.49, 0.51]$ 14) $[7.8, 8.2]$ 15) $(0.9, 1.1)$

16) $[5/4, 7/4]$ 17) $(0.59, 0.66)$ 18) $(-\infty, 0)\cup(0, 0.9)\cup[1.25, \infty)$ 19) **R**-{0}

20) $(1, 3/2)$ 21) $(-\infty, 7/4)\cup(3, \infty)$ 22) $[2/3, 4)$ 23) $(-\infty,-1/3]\cup[1,\infty)$

24) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ 25) $(-0.5, 1.5)$ 26) $(1.25, 2.75)$ 27) $(-\infty, 3/2)$

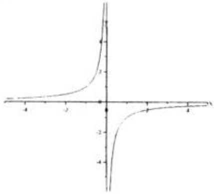
28) $(-\infty, 0)\cup(4/3, \infty)$

Ejercicios 1.3 (Página 16)

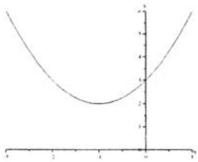
1) **R**-{2, 3} 2) $[1, \infty)$ 3) **R**-{1, 2, 3} 4) **R**-{2} 5) **R** 6) **R**-{2} 7) **R**

Ejercicios 1.4 (Página 32)

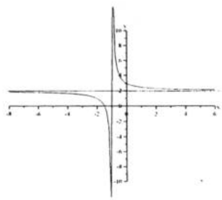
1)



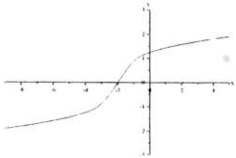
2)



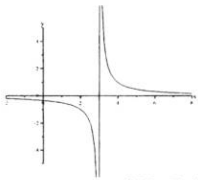
3)



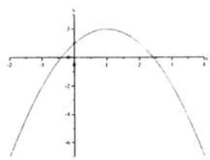
4)



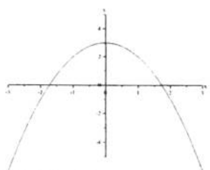
5)



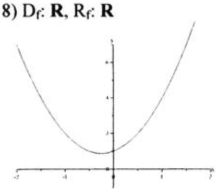
6)



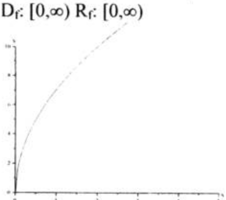
7) D_f: **R**, R_f: **R**



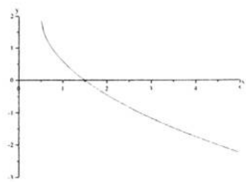
8) D_f: **R**, R_f: **R**



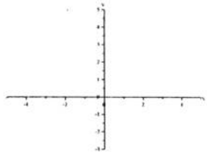
9) D_f: $[0,\infty)$ R_f: $[0,\infty)$



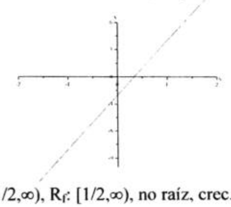
10) D_f: $[1/2,\infty)$ R_f: $(-\infty,2]$



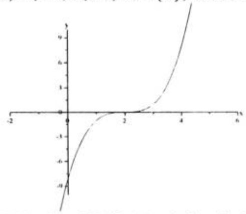
11) D_f: **R**, R_f: **R**, raíz: {1}, decreciente en **R**



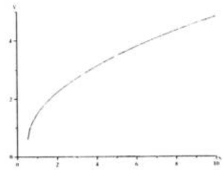
12) D_f: **R**, R_f: **R**, raíz: {1/3}, creciente en **R**



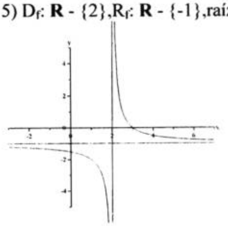
13) D_f: **R**, R_f: **R**, raíz: {2}, creciente en **R**



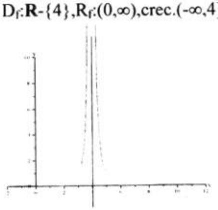
14) D_f: $[1/2,\infty)$, R_f: $[1/2,\infty)$, no raíz, crec.$[1/2,\infty)$



15) D_f: **R** - {2}, R_f: **R** - {-1}, raíz: {3}, crec.D_f



16) D_f: **R**-{4}, R_f: $(0,\infty)$, crec.$(-\infty,4]$, decr.$[4,\infty)$



17) a) $f(x) = \sqrt{x^2+8}$, D_f: **R** b) $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x+6}+x^2+2}{x^2-4}$, D_f: $(-6,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

18) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{5-x}}$, D:[-6,5); $(h \circ f)(x) = |x+6| - 4$, D:$[-4,\infty)$; $(g \circ h)(x) = \sqrt{9-x^2}$, D:[-3,3]

19) $(f+g)(x) = 3x^2+x-1$, D: **R**; $(g-f)(x) = -3x^2+x+3$, D: **R**; $(f\,g)(x) = 3x^3+3x^2-2x-2$, D: **R**; $(f/g)(x) = \dfrac{3x^2-2}{x+1}$, D: **R** - {-1}, $(f \circ g)(x) = 3x^2+6x+1$, D: **R**; $(g \circ f)(x) = 3x^2-1$, D: **R**.

20) $g(x) = 1+x^3$, $h(x) = x^{27}$

21) $g(x) = \sqrt{1-x}$, $h(x) = \sqrt{x+1}$

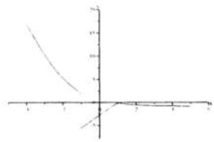
22) $g(x) = x^{3/2}$, $h(x) = x - \sqrt{2+x}$

23) $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x^3+1|-2}$, D: $(-\infty, -\sqrt[3]{3})$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2-2)^{3/2}+1}$, D: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

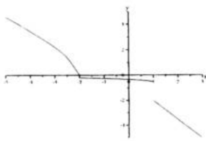
24) $(f \circ g)(x) = 3/x^3 + 2/x^2 + 1$, D: $\mathbf{R} - \{0\}$; $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x^3+2x^2+1}$, D: $\mathbf{R} - \{-1\}$

Ejercicios 1.5 (Página 38)

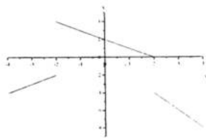
1)



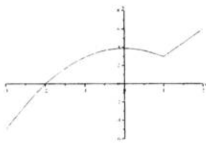
2)



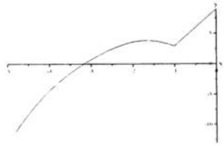
3)



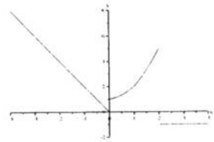
4) a



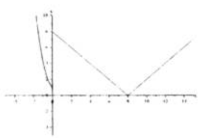
b



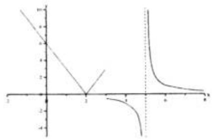
5)



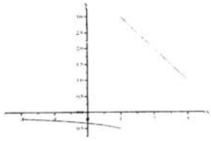
6)



7)



8)



9)

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{x-1} & x \le 0 \\ x-9 & 0 \le x \le 2 \\ 5+1/x & x > 2 \end{cases} \quad (f-g)(x) = \begin{cases} x^2+1-\dfrac{1}{x-1} & x \le 0 \\ x-7 & 0 \le x \le 2 \\ 5-1/x & x > 2 \end{cases} \quad (f \cdot g)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & x \le 0 \\ 8-x & 0 \le x \le 2 \\ 5/x & x > 2 \end{cases}$$

$$(f/g)(x) = \begin{cases} (x^2+1)(x-1) & x \le 0 \\ 8-x & 0 \le x \le 2 \\ 5x & x > 2 \end{cases}$$

10)

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 0 \\ x-1/x & 2\le x\le 4 \\ 1-x-1/x & x>4 \end{cases} \qquad (f-g)(x)=\begin{cases} -x-3 & x\le 0 \\ x+1/x & 2\le x\le 4 \\ 1-x+1/x & x>4 \end{cases}$$

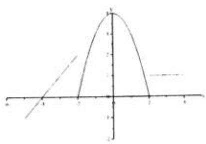
$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ -1 & 2\le x\le 4 \\ \dfrac{x-1}{x} & x>4 \end{cases} \qquad (f/g)(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ -x^2 & 2\le x\le 4 \\ x^2-x & x>4 \end{cases}$$

11)

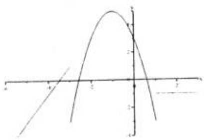
$$(f+g)=\begin{cases} x-4+\sqrt{x-1} & -3\le x\le -2 \\ \dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x-1} & -2<x\le -1 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3} & -1<x\le 1 \\ x^2+x-4 & 1<x\le 3 \end{cases} \qquad (f-g)=\begin{cases} x-4-\sqrt{x-1} & -3\le x\le -2 \\ \dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x-1} & -2<x\le -1 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3} & -1<x\le 1 \\ x^2-x & 1<x\le 3 \end{cases}$$

$$(f\cdot g)=\begin{cases} (x-4)\sqrt{x-1} & -3\le x\le -2 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} & -2<x\le -1 \\ \dfrac{1}{3x^2} & -1<x\le 1 \\ (x^2-4)(x+2) & 1<x\le 3 \end{cases} \qquad (g\circ f)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}} & -3\le x\le -2 \\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x-1}} & -2<x\le -1 \\ \dfrac{3}{x^2} & -1<x\le 1 \\ x+2 \quad 1<x<2, & 2<x\le 3 \end{cases}$$

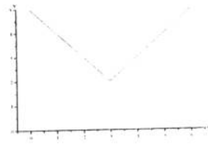
12) a



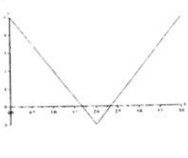
b



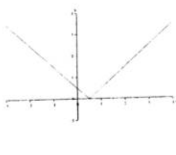
13)



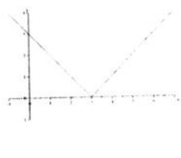
14)



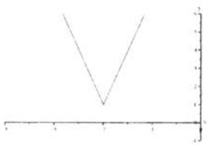
15)



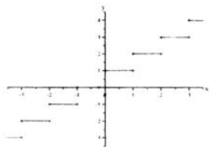
16)



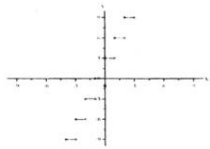
17)



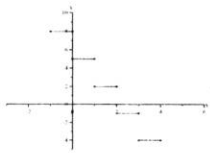
18)



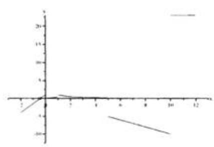
19)



20)



21)



Ejercicios 1.6 (Página 45)

1) a) $\ell = a\ell_0T + \ell_0(1\text{-}aT_0)$, pendiente: $a\ell_0$, ordenada al origen: $\ell_0(1\text{-}aT_0)$, b) 1.0007 m, c) T = 120 °C

2) $C = 20000 + 1500x$ 3) a) $A = 2x^2 + 480/x$, b) $100\ cm^2 \leq A_b \leq 225\ cm^2$

4) a) $P = 2x + 200/x$, b) $30 \leq P \leq 40.67$ 5) $V = \pi x(18\text{-}x)^2$

6) C = a + bx + c, a: para despegar, b: para aterrizar, c: cada kilómetro.

7) a) $\$ = 260 + 4.5[x]$, b) 380 km. 8) a) $d = 650t$, b) $s(d) = \sqrt{36 + d^2}$, c) $s(t) = \sqrt{36 + (650t)^2}$

9) $\$ = 24x^2 + 480/x$ 10) $4 \leq p \leq 8$ 11) $A = 5x - 4.27x^2 + 0.79x^2$ 12) $A = 4x - 1.28x^2$

13) $A = 6x - 0.6x^2$ 14) $V = 120000 - 9600[t]$ 16) a) 144 ft, b) $0.55 \leq t \leq 5.45$

17) T = 25° - 10 h °/km, (-25,25)°

Ejercicios 1.7 (Página 48)

1) $x = p/5 + 5$ 2) $p = 0.04x^2$ 3) $i = 6.5/d$ 4) $i = 1.4/d^2$ 5) $d^2 = t^3$

Capítulo 2

Ejercicios 2.1 (Página 57)

1) 4 2) 0 3) 1/8 4) 0 5) $3x^2$ 6) -1 7) -7 8) -1/6 9) 1/4 10) -1/2 11) -1/2

12) -2 13) -1/2 14) 3/4 15) 0 16) -3 17) 3 18) 3/4 19) 0 20) 3

Ejercicios 2.2 (Página 60)

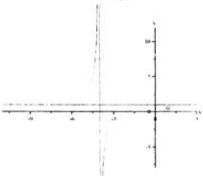
1) 2 2) ∞ 3) 1 4) ∞ 5) 0 6) ∞ 7) 3/10 8) 4 9) 0 10) ∞ 11) ∞

12) 8 13) $-\infty$ 14) 1 15) $-\infty$ 16) ∞ 17) ∞ 18) -1/5 19) -1/3 20) 0

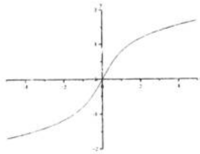
Ejercicios 2.3 (Página 69)

1) $x = \pm 1$, $y = 0$ 2) $x = 2$, $y = -1$

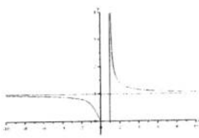
3) D_f: **R** - {1,-4}, raíz: x = -2.
continua en su dominio,
asíntotas: x = -4, y = 1.



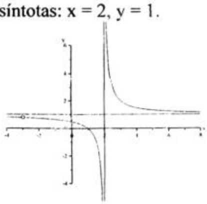
4)



5) D_f: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, raíz: x = 0,
R_f : $[0,1)\cup(1,\infty)$, disc. en (0,1].
asíntotas: x = 1, y = 1.



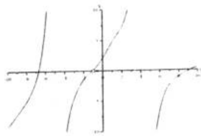
6) D_f: **R** - {2,-3}, raíz: x = 1,
continua en su dominio,
asíntotas: x = 2, y = 1.



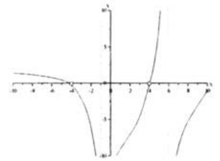
7) x = -1.38,
x = 0.33,
x = 1.21.

8) x = 1

9)



10)



11) A = -1/2, B = -2 12) a = 1, b = -3 13) 0

Capítulo 3

Ejercicios 3.1 (Página 76)

1) $y' = 12x^{11}$ 2) $y' = -12x^{-13}$ 3) $y' = \frac{4}{3}x^{1/3}$ 4) $y' = -\frac{4}{x^5}$ 5) $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ 6) $f'(x) = e\,x^{e-1}$

7) $y' = 6x^{1/2} - \frac{5}{2}x^{-1/2}$ 8) $y' = 18x^2 + 8x - 2$ 9) $y' = 6t - 6t^{3/2} + 2/t^3$ 10) $f'(x) = -\frac{8}{3x^{5/3}} - 15x^4 + 2$

Ejercicios 3.2 (Página 79)

1) $f'(x) = 8(2x^2 - 3) + 4x\,(8x)$ 2) $y' = (3t^2 + 10t + 1)(t^2 - 7t + 2) + (2t - 7)(t^3 + 5t^2 + t)$

3) $f'(x) = (36x^2 - 4)(x^{2/3} + 5x) + (\frac{2}{3}x^{-1/3} + 5)(12x^3 - 4x)$

4) $y' = (12x^2)(1 + 2x^2) + (1 + 4x^2)(4x)$

5) $f'(x) = (2x - 1)(3x + 2) + x(2)(3x + 2) + x(2x - 1)(3)$

6) $y' = (5 - 12x^3)(2 - x^2)(3x - 6) + (5x - 3x^4)(-2x)(3x - 6) + (5x - 3x^4)(2 - x^2)(3)$

7) $y' = (\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{4}{3}4x^{-4/3})(5x^{5/2} + 3x^{7/2} - 2x^{3/7}) + (2x^{1/3} - 4x^{-1/3})(25x^{3/2} + 21x^{5/2} - 6x^{-4/7})$

8) $f'(x) = (4x^3 - 6x)(x^3 + 2x - 1) + (x^4 - 3x^2 + 8)(3x^2 + 2)$

9) $y' = (72x^7 - 4x^3 + 1)(3x - 6x^7 + 5x^{11}) + (9x^8 - x^4 + x)(3 - 42x^6 + 55x^{10})$

10) $y' = (6x^{1/5} + \frac{32}{3}x^{5/3})(5x^{1/7} - 7x^{-1/3})(9x^{5/6} + 4x^{7/11}) + (5x^{6/5} + 4x^{8/3})(\frac{5}{7}x^{-6/7} + \frac{7}{3}x^{-4/3})(9x^{5/6} +$ $4x^{7/11}) + (5x^{6/5} + 4x^{8/3})(5x^{1/7} - 7x^{-1/3})(\frac{45}{6}x^{-1/6} + \frac{28}{11}x^{-4/11})$

Ejercicios 3.3 (Página 80)

1) $y' = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2}$ 2) $y' = \dfrac{x^{1/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-1)}{x^{2/3}}$ 3) $y' = \dfrac{2x(2x+8)-2(x^2+1)}{(2x+8)^2}$

4) $f'(x) = \dfrac{6x(5x^2+7x-2)-(10x+7)(3x^2+1)}{(5x^2+7x-2)^2}$ 5) $f'(x) = \dfrac{[(x-2)+(x+1)](7x-6)-7(x+1)(x-2)}{(7x-6)^2}$

6) $f'(x) = \dfrac{(x-6)[(x^2+2x+1)+(x-2)(2x+2)]-(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-6)^2}$

7) $y' = \dfrac{(x-1(2x+6))(12x^2+50x+25)+(4x+4)(4x^3+25x^2+25x)}{(2x+6)^2(x-1)^2}$

8) $y' = \dfrac{(4x+10)(2x-3)(x-7)-(4x+17)(x-9)(2x+8)}{(2x-3)^2(x-7)^2}$

9) $y' = \dfrac{(12x^3+54x^2+82x+48)(5x^2-15x-12)(-8x^2+11)-(3x^2-8)(x^2+6x+11)(-160x^3+54x^2+82x+48)}{(5x^2-15x-12)^2(-8x^2+11)^2}$

10) $y' = \dfrac{(63x^2+32x-25)[(-6x^3-25x^2-21x+2)-(11x^3-9x^2+12x+11)]}{[(-6x^3-25x^2-21x+2)-(11x^3-9x^2+12x+11)]^2} - \dfrac{(-51x^2-32x-33)[(3x^3+5x^2+11x+19)+(18x^3+11x^2-36x+41)]}{[(-6x^3-25x^2-21x+2)-(11x^3-9x^2+12x+11)]}$

Ejercicios 3.4 (Página 83)

1) $f'(x) = 99(x+1)^{98}$

2) $y' = (x^{1/2}+1)^{99}\left(\dfrac{50}{\sqrt{x}}\right)$

3) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $f'(x) = 12(x^5+1)^{11}(5x)(x^2+3)^6 + (x^5+1)^{12}(12x)(x^2+3)^5$

5) $f'(x) = 12(x-1)^{11}(1-6x)^{2/3} + (x-1)^{12}(-4)(1-6x)^{2/3}$

6) $f'(x) = (2x+3)(1-2x)^9 + (x^2+3x)(-18)(1-2x)^8$

7) $y' = 3[x^3 + (2x-1)^3]^2[3x^2 + 6(2x-1)^2]$

8) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1-x}}}\left[1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right]$

9) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$

10) $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{11-5x-3x^2}{x^2+6x+8}}\left[\dfrac{(2x+6)(11-5x-3x^2)+(5+6x)(x^2+6x+8)}{(11-5x-3x^2)^2}\right]$

Ejercicios 3.5 (Página 85)

1) $y' = 2/3$ 2) $y' = 2p/y$ 3) $y' = -x^2/y^2$ 4) $y' = -\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$ 5) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

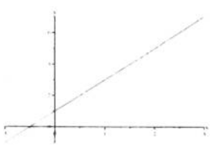
6) $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 7) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ 8) $y' = \dfrac{1-y^3}{1+3xy+3y^2+y^3}$ 9) $y' = \dfrac{6x-2y-4x^3y^5}{-2x+5x^4y^4}$

10) $y = x$ 11) $y = -x$ 12) $y = -\dfrac{45}{41}x + \dfrac{176}{41}$ 13) $y = 0$ 14) $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{5}{2}$

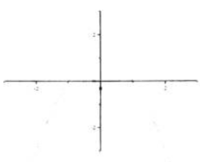
Capítulo 4

Ejercicios 4.1 (Página 101)

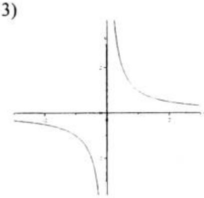
1)



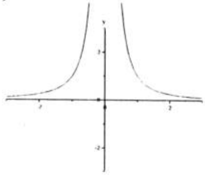
2)



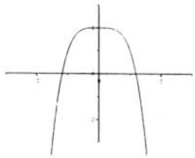
3)



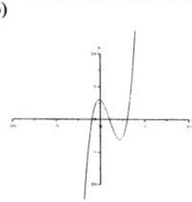
4)



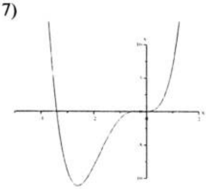
5)



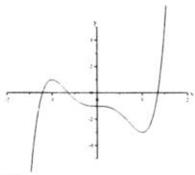
6)



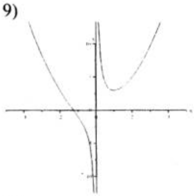
7)



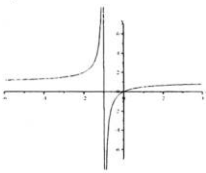
8)



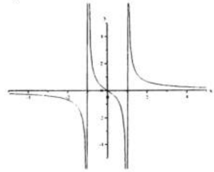
9)



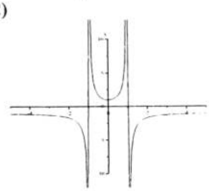
10)



11)



12)



Ejercicios 4.2 (Página 106)

1) $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ 2) $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ 3) 111.24 km/h 4) 21.39 km/h

5) 692.8 km/h 6) 8.33 ft/s 7) -2.4 m/s 8) 0.53 km/h 9) 10.73 ft/s 10) -1.6 cm/s

11) 1.008 m/s 12) 296.39 km/h 13) 0.28 m^3/min 14) 3.33 cm/min

15) 0.0012 ft/min 16) 0.38 ft/min 17) 80 cm^3/min 18) 0.98 cm^3

Ejercicios 4.3 (Página 110)

1) (1.2,-0.6) 2) $(1, \sqrt{5}), (1, -\sqrt{5})$ 3) equilátero de lado $\sqrt{3}\,r$ 4) 3 cm^2

5) $R_{cil} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R_{esf}$, $h = \frac{2}{3} R_{esf}$ 6) 3.96 °C 7) $a_{máx} = 62.9$, $a_{mín} = 21.5$

8) ancho = 9.23 cm, grosor = 13.06 cm 9) x = 1.95 m, y = 0.97 m 10) 4000 cm^3

11) x = 40 cm, h = 20 cm 13) largo = 3.3 m, ancho = 1.65 m, altura = 1.83 m

14) $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 15) $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, h = 0 16) 20 cm 17) a 0.77 km de V_1

Bibliografía

Cruse, A. B. "Lectures on freshman calculus" . Addison Wesley. 1971.

Demidovich, B. "Problemas y ejercicios de análisis matemático". Ediciones Quinto Sol. 1985.

González, J. A. "Gráficas y ecuaciones empíricas". Limisa. 1988.

Kline, M. "Calculus, an intuitive and physical approach". John Wiley and sons. 1977.

Masani, P. R. "Cálculo diferencial e integral". Publicaciones cultural. 1968.

Piskunov, N. "Cálculo diferencial e integral". Ediciones Quinto Sol. 1984.

Salazar, M. "Problemas de cálculo diferencial e integral". UAM Azcapotzalco. 1999.

Spivak, M. "Calculus". Segunda edición. Reverté. 1992.

Stewart, J. "Cálculo, conceptos y contextos". International Thompson Editores. 1999.

Swokowski, E. W. "Cálculo y geometría analítica". Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamericana. 1989.

Thomas, G. B. "Cálculo con geometría analítica". Sexta edición. Addison Wesley Iberoamericana. 1987.

Métodos operativos de cálculo diferencial
Se terminó de imprimir en el mes de noviembre del año 2006 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana *Unidad Azcapotzalco*

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Se imprimieron 100 ejemplares más sobrantes para reposición.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COSEI COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2892842

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.

- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

ISBN: 970-31-0319-7

978-97031-03195

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias