UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

CAPÍTULO 3

CURSO PREPARATORIO

DE LA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2010–2011

Elaborado por

Elena Romera

Índice general

Capítulo 3

Cálculo Diferencial

3.1. Funciones elementales

Una FUNCIÓN es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto. $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x.

En muchas ocasiones, las funciones se expresan por medio de una fórmula como, por ejemplo, $f(x) = 3x + 5$. Pero una función no tiene necesariamente que expresarse por medio de una fórmula como, por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tampoco es necesario que esté definida para todos los números reales; así definimos:

El DOMINIO de una función es el conjunto de números para los que está definida, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.

Si no se especifica nada, se sobreentiende que el dominio de una función está formado por todos los números para los cuales tiene sentido la definición.

La IMAGEN de una función es el conjunto de los valores y tales que existe un número x con $f(x) = y$, y se denota por $\mathrm{Img}(f)$.

La GRÁFICA de una función es el conjunto de puntos del plano: $\{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}\ (f)\}$. Esos pares se representan en el plano coordenado.

Una función f es PERIÓDICA de PERIODO k si $f(x + k) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y decimos que k es el PERIODO MÍNIMO de f si $k > 0$ y no existe ningún otro periodo T de f con $0 < T < k$.

Una función es INYECTIVA si $f(x) = f(y)$ si y sólo si $x = y$. Entonces, la gráfica de una función inyectiva sólo puede cortar una vez a cada recta horizontal, es decir, no repite valores.

Una función es SOBREYECTIVA (o SUPRAYECTIVA) si la imagen es todo el conjunto de llegada o conjunto final.

Una función es BIYECTIVA si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Para aprovechar las simetrías de la gráfica de una función decimos que una función f es PAR si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Decimos que la función f es IMPAR si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y, mientras que la de una función impar es simétrica respecto del origen. Funciones pares son, por ejemplo, 1, x^2, x^4, mientras que son impares x y x^3.

3.1.1. Polinomios, funciones racionales y raíces

Un POLINOMIO se escribe en general:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde los números $a_0, \ldots, a_n$ son reales y $a_n \neq 0$. El GRADO de un polinomio así es n . Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y la imagen de los de grado impar también es todo $\mathbb{R}$, pero no es así con las de grado par. Las RAÍCES del polinomio son los valores de x tales que $f(x) = 0$; luego si el grado es n, a lo más puede haber n raíces, pero puede que haya menos, incluso ninguna si el grado es par.

Los cocientes de dos polinomios se llaman FUNCIONES RACIONALES y su dominio es todo $\mathbb{R}$ salvo los puntos en que se anula el denominador.

Las RAÍCES cuadradas o de orden par sólo están definidas si el radicando es mayor o igual que cero. Las raíces de orden impar están definidas siempre.

3.1.2. Funciones trigonométricas

Las funciones TRIGONOMÉTRICAS son las funciones SENO, COSENO, TANGENTE (y también secante, cosecante y cotangente), junto con sus funciones inversas que definiremos más adelante.

El coseno de x ($\cos x$) es la abscisa de un punto de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen que forma un ángulo x con el eje horizontal. El seno ($\operatorname{sen} x$) es la ordenada de ese punto. A partir de ellas se definen:

$$\text{TANGENTE: } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \text{COTANGENTE: } \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$
$$\text{SECANTE: } \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{COSECANTE: } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Mediremos los ángulos en RADIANES. Un radián es el ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia. Así, 360º son 2π radianes, y 90º son $\pi/2$.

PROPIEDADES

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{Dom}(\cos x) = \mathbb{R}$. $\operatorname{Img}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{Img}(\cos x) = [-1, 1]$.
3. $\operatorname{Dom}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Img}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$.
4. Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π y la tangente periodo π.
5. El coseno es par y el seno y la tangente son impares:
$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$
6. Fórmulas para los ángulos dobles:
$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, \qquad \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$
7. Fórmulas para la suma y la diferencia:
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \qquad \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$
8. Relaciones geométricas:
$$\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x, \qquad \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{tg}(x + \pi/2) = -\operatorname{cotg} x.$$

3.1.3. Logaritmos y exponenciales

La EXPONENCIAL a^x (con $a > 0$) tiene por dominio todo $\mathbb{R}$ y por imagen $(0, \infty)$, mientras que el logaritmo $\log_a x$, como función que deshace la exponencial, tiene por dominio $(0, \infty)$ y por imagen $\mathbb{R}$. Tenemos:

$$\log_a x = b \quad \Longleftrightarrow \quad a^b = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{b \log a} = x \quad \Longleftrightarrow \quad b \log a = \log x \,,$$

y entonces

$$\log_a x = b = \frac{\log x}{\log a} \,.$$

Cuando la base del logaritmo es e lo llamamos LOGARITMO NEPERIANO y escribimos $\ln x$ o equivalentemente $\log x$, y sólo cuando la base no es e se escribirá explícitamente. La base de un logaritmo, al igual que de la exponencial, puede ser cualquier número positivo.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Para $a, x, y > 0$ y $c \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$.
4. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$.
5. $\log_a x^c = c \log_a x$.

PROPIEDADES DE LAS EXPONENCIALES

Para $a > 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$ se tiene:

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^b a^c = a^{b+c}$
4. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.
5. $(a^b)^c = a^{bc}$.
6. $\sqrt[c]{a^b} = a^{b/c}$.

La exponencial e^x suele denotarse también como $\exp x$.

A partir de la función exponencial se definen las funciones COSENO y SENO HIPERBÓLICOS mediante:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

que satisfacen la relación:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1\,,$$

y las funciones TANGENTE y COTANGENTE HIPERBÓLICAS:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\,, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\,.$$

Las funciones seno, tangente y cotangente hiperbólicos son impares mientras que el coseno hiperbólico es par.

3.2. Operaciones con funciones y funciones inversas

Podemos realizar las siguientes operaciones combinando funciones:

1. Sumas: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. Productos: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
3. Traslaciones horizontales: $f(x+c)$, y verticales: $f(x)+c$, donde $c \in \mathbb{R}$.
4. Dilataciones horizontales: $f(cx)$, y verticales: $cf(x)$, con $c \in \mathbb{R}$.
5. COMPOSICIÓN: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Para que la composición esté definida es necesario que $\mathrm{Img}(g) \cap$ Dom $(f) \neq \varnothing$. El dominio de $f \circ g$ es $\{x \in \mathrm{Dom}(g) : \ g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$. Es importante notar que la composición no es conmutativa, es decir, que por regla general $f \circ g \neq g \circ f$.

La FUNCIÓN INVERSA de una cierta f dada es (si es que existe) otra función, llamada f^{-1}, que deshace lo que hace f, es decir:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$$

cuando las composiciones tienen sentido. Un ejemplo es $\log x$ frente a e^x:

$$\log(e^x) = x = e^{\log x}.$$

Para que exista la inversa de una función f es necesario que ésta sea inyectiva, como las anteriores. La función inversa de una f inyectiva cumple:

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Img}(f) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Img}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)\,.$$

Además, gráfica de f^{-1} es la curva simétrica de la de f respecto a la recta $y = x$, que es la bisectriz del primer y el tercer cuadrante.

Pero si f no es inyectiva podemos definir una inversa de la función considerando como dominio de f solamente un trozo donde sí lo sea. Así, $f(x) = x^2$ es inyectiva en $[0, \infty)$, y su inversa allí es $\sqrt{x}$.

Podemos definir así inversas para las funciones seno, coseno y tangente si reducimos su dominio. Para $\operatorname{sen} x$ tomamos $[-\pi/2, \pi/2]$, donde es inyectiva, y a su inversa la llamamos ARCOSENO, denotándola por $\operatorname{arc\,sen} x$; por tanto:

$$\mathrm{Dom}(\operatorname{arc\,sen} x) = [-1, 1]\,, \qquad \mathrm{Img}(\operatorname{arc\,sen} x) = [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Para $\cos x$ tomamos el intervalo $[0, \pi]$ ya que en él es inyectiva. Su inversa, el ARCOCOSENO, que denotamos por $\operatorname{arc\,cos} x$, tiene:

$$\mathrm{Dom}(\operatorname{arc\,cos} x) = [-1, 1]\,, \qquad \mathrm{Img}(\operatorname{arc\,cos} x) = [0, \pi]\,.$$

La tangente tiene inversa, la ARCOTANGENTE, cuando nos restringimos a $(-\pi/2, \pi/2)$. Se denota por $\arctan x$, y para ella

$$\mathrm{Dom}(\arctan x) = \mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{Img}(\arctan x) = (-\pi/2, \pi/2)\,.$$

Así definidas, el arcoseno y el arcotangente son funciones impares; el arcocoseno no es par ni impar.

3.3. Límites

Decimos que el LÍMITE de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es l y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. Intuitivamente, significa que l es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0.

El límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ sólo depende de los valores de f cerca de x_0 y no depende del valor de f en x_0; de hecho, puede ocurrir que $f(x_0)$ no exista.

TEOREMA
Si existe el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$, entonces es único.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES
Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = l\cdot m$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, si $m \neq 0$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = l^m$, si el resultado es distinto de 0^0.

5. $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a(l)$, si $a>0$ y $l>0$.

Los apartados 1 y 2 siguen siendo ciertos para cualquier número finito de sumandos o factores.

Si no existe un límite puede que sí existan los LÍMITES LATERALES, que definimos a continuación:

1. Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la DERECHA es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ si $x \in (x_0, x_0+\delta)$.

2. Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ (y se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la IZQUIERDA es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ si $x \in (x_0-\delta, x_0)$.

TEOREMA
Se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$. En particular, si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, entonces no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Los LÍMITES INFINITOS son los siguientes:

1. Decimos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ si $0 < |x - x_0| < \delta$.
2. Decimos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ si $0 < |x - x_0| < \delta$.

De forma similar pueden definirse los límites infinitos cuando $x \to x_0^+$ y $x \to x_0^-$.

También pueden definirse los LÍMITES EN EL INFINITO:

1. Decimos que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real M tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ si $x > M$.
2. Decimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real M tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ si $x < M$.

De forma similar pueden definirse los límites infinitos en el infinito.

Todos estos tipos de límites, ya sean laterales, infinitos, en el infinito, etc. si existen son únicos.

Las propiedades de los límites se verifican para todos los tipos de límites, siempre que las operaciones estén bien definidas. Cuando aparecen infinitos las reglas a seguir son las siguientes: (a denota siempre un número real)

$$\begin{aligned}
a + \infty = \infty\,, &\qquad a - \infty = -\infty\,,\\
\infty + \infty = \infty\,, &\qquad -\infty - \infty = -\infty\,,\\
\infty \cdot \infty = \infty\,, &\qquad -\infty \cdot \infty = -\infty\,,\\
\frac{a}{\infty} = 0\,, &\\
\frac{a}{0} = \pm\infty\,,\ \text{ si }\ a \neq 0\,, &\\
\infty^a = \infty\,,\ \text{ si }\ a > 0\,, &\qquad \infty^a = 0\,,\ \text{ si }\ a < 0\,,\\
\infty^\infty = \infty\,, &\qquad \infty^{-\infty} = 0\,,\\
a^\infty = \infty\,,\ \text{ si }\ a > 1\,, &\qquad a^\infty = 0\,,\ \text{ si }\ 0 \le a < 1\,,\\
0^a = 0\,,\ \text{ si }\ a > 0\,. &
\end{aligned}$$

Estas igualdades no son igualdades literales, sino igualdades entre límites.

Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar. A estas expresiones las llamamos INDETERMINACIONES y las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad \infty^0\,, \quad 0^0\,, \quad 1^{\infty}\,, \quad 1^{-\infty}\,.$$

No existe un criterio general que permita resolver todas las indeterminaciones.

RESOLUCIÓN DE ALGUNAS INDETERMINACIONES

1. En indeterminaciones $\infty - \infty$, conviene operar: reducir a común denominador (si la función es una diferencia de fracciones) o multiplicar y dividir por el conjugado (si en la función aparece una diferencia de raíces cuadradas).

2. En cocientes de polinomios y límites cuando $x \to \infty$, una indeterminación del tipo ∞/∞ se resuelve dividiendo numerador y denominador por la potencia mayor.

3. En cocientes de polinomios, una indeterminación del tipo $0/0$ se resuelve factorizando numerador y denominador y simplificando.

4. En los límites de los tipos ∞/∞ y $0/0$ (e incluso $0{\cdot}\infty$) también suele dar buen resultado aplicar la regla de Bernouilli-l'Hôpital (que veremos en el apartado de derivación)

5. En las indeterminaciones del tipo 1^{∞} se cumple el siguiente resultado:

   Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ es ∞ ó $-\infty$, entonces

   $$\lim_{x\to\alpha} \big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)}\,,$$

   si existe el límite $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)$, donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

El número e ocupa un lugar destacado en las matemáticas: es extraordinariamente útil en la resolución de límites del tipo $1^{\pm\infty}$, y es la base de la exponencial e^x y del logaritmo neperiano $\ln x = \log x$. Es tan útil en el cálculo de límites precisamente porque se define como

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

3.4. Continuidad

Decimos que una función f es CONTINUA en el punto x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Intuitivamente, si f es continua en x_0, $f(x)$ se aproxima a $f(x_0)$ cuando x se aproxima a x_0, es decir, la gráfica de f no tiene un "salto" en el punto x_0.

Entonces, para que f sea continua en x_0:

1. Debe existir el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
2. Debe estar definida f en x_0.
3. Deben coincidir el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$.

Si existe y es finito el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, pero f no es continua en x_0, decimos que f tiene una DISCONTINUIDAD EVITABLE en x_0. Por tanto, si en x_0 le damos el valor apropiado, pasa a ser continua en dicho punto.

PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD
Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en x_0, entonces:

1. $f(x) + g(x)$ es continua en x_0.
2. $f(x)g(x)$ es continua en x_0.
3. $f(x)/g(x)$ es continua en x_0, si $g(x_0) \neq 0$.
4. $(f(x))^{g(x)}$ es continua en x_0, si está definida en un entorno del punto.

Las propiedades 1 y 2 siguen siendo ciertas para cualquier número finito de sumandos o factores.

TEOREMA
Si $f(x)$ es continua en x_0 y $g(x)$ es continua en $f(x_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es continua en x_0.

TEOREMA
Sean $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

1. Los polinomios y las funciones a^{bx}, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $|x|$ son continuas en $\mathbb{R}$.
2. Las funciones x^b, $\log_a x$, $\operatorname{tg} x$ son continuas en su dominio de definición.

Una función f es CONTINUA EN EL INTERVALO CERRADO $[a, b]$ si es continua en (a, b), y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

La continuidad de funciones en intervalos cerrados es una propiedad muy útil.

TEOREMA DE BOLZANO
Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La hipótesis $f(a) \cdot f(b) < 0$ significa que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo distinto.

3.5. Derivabilidad

La DERIVADA de f en el punto x_0, que llamamos $f'(x_0)$, es si existe, el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Decimos que una función f es DERIVABLE en el punto x_0 si su derivada en x_0 existe y es finita. Decimos que f es DERIVABLE EN UN CONJUNTO ABIERTO si es derivable en todos los puntos de dicho conjunto.

La derivada de f en el punto x_0 también se designa por:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0),$$

donde df, dx son el DIFERENCIAL de f y el DIFERENCIAL de x, respectivamente.

La derivada de una función en un punto x_0 es también la PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE a la gráfica de la función en ese punto. Así, la RECTA TANGENTE a la gráfica tiene la ecuación:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

TEOREMA
Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS
Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en x_0 y c es una constante, entonces:

1. $f(x) + g(x)$ es derivable en x_0, y $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $cf(x)$ es derivable en x_0, y $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
3. $f(x)g(x)$ es derivable en x_0, y
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
4. Si $g(x_0) \neq 0$, $1/g(x)$ es derivable en x_0, y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}\ .$$
5. Si $g(x_0) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ es derivable en x_0, y su derivada es
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\ .$$

TEOREMA: REGLA DE LA CADENA
Si $g(x)$ es derivable en x_0 y $f(x)$ es derivable en $g(x_0)$, entonces la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x_0 y
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Además, si la función $f(x)$ es continua en x_0 y el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe y es finito, entonces $f'(x)$ es continua en x_0. Esto quiere decir que la derivada de una función nunca puede tener una discontinuidad evitable.

La siguiente es una herramienta muy útil para el cálculo de límites. Normalmente se llama regla de l'Hôpital y aquí, para ser justos con la historia, la denominamos regla de Bernouilli-l'Hôpital.

TEOREMA: REGLA DE BERNOUILLI-L'HÔPITAL
Si se verifica una de las dos hipótesis siguientes:

1. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$,
2. $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$,

entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

si existe el último límite. Aquí α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

En las funciones que son inversas unas de otras su derivada también está relacionada:

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA
Si f es continua e inyectiva en (a, b), derivable en $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \,, \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \,.$$

DERIVADAS ELEMENTALES
Si α, c y a son constantes reales, con $a > 0$:

1. $(c)' = 0$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
3. $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$.
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(a^x)' = a^x \log a$.
7. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.
10. $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.

11. $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$.
12. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$.
13. $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arc\,cos} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3.6. Gráficas

La gráfica de una función es la representación de los pares $(x, f(x))$, donde $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Para cada abscisa sólo puede haber una ordenada. Una circunferencia, por ejemplo $x^2+(y-1)^2 = 9$, necesita dos funciones para describirla:

$$y = 1 + \sqrt{9-x^2}\,, \qquad\qquad y = 1 - \sqrt{9-x^2}\,.$$

Para la representación gráfica estudiaremos:

1. Dominio, simetrías, periodicidad y asíntotas.
2. Crecimiento, decrecimiento y extremos.
3. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

3.6.1. Dominio, simetrías, periodicidad y asíntotas

Averiguamos el dominio, si la función es par o impar, si es periódica y estudiamos el comportamiento de f en los extremos del dominio, calculando límites. En particular, estudiamos si tiene o no lo que llamamos asíntotas.

Decimos que f tiene una ASÍNTOTA HORIZONTAL cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l\,,$$

con $l \in \mathbb{R}$ y la asíntota es la recta $y = l$. Decimos que f tiene una ASÍNTOTA HORIZONTAL cuando $x \to -\infty$ si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m\,,$$

con $m \in \mathbb{R}$ y su asíntota es $y = m$.

Si alguno de estos límites no es finito puede que haya aún rectas asíntotas en ∞ ó $-\infty$:

Decimos que f tiene una ASÍNTOTA OBLICUA cuando $x \to \infty$ si los límites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$$

son finitos, con $a \neq 0$. En ese caso la asíntota es $y = ax + b$. De forma similar se define para $x \to -\infty$.

Si para $x \to \infty$ existe una asíntota horizontal entonces no hay asíntota oblicua, y si existe asíntota oblicua entonces no hay asíntota horizontal. Lo mismo ocurre para $x \to -\infty$.

Una función puede tener asíntotas distintas para $x \to \infty$ y para $x \to -\infty$ y la existencia de una no significa nada a priori para la existencia de la otra, salvo que las características de la función (por ejemplo, si f es par) así lo indiquen.

Decimos que f tiene una ASÍNTOTA VERTICAL en $x = x_0$ si alguno de los límites laterales

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

es ∞ ó $-\infty$. La asíntota es la recta $x = x_0$.

Estas asíntotas pueden aparecer en los extremos del dominio de la función si éstos son finitos, y nunca en los puntos en los que la función es continua.

La gráfica de una función nunca puede cruzar una asíntota vertical, pero sí puede cruzar una asíntota horizontal u oblicua. Además, los polinomios nunca tienen asíntotas de ningún tipo, excepto los de grado 1 ó 0, cuyas gráficas son rectas (y, por tanto, ellos son sus propias asíntotas).

3.6.2. Crecimiento, decrecimiento y extremos

La derivada nos da mucha información sobre f:

TEOREMA
Si f es una función derivable en un intervalo I, entonces $f' \geq 0$ en I si y sólo si f es creciente en I, y $f' \leq 0$ en I si y sólo si f es decreciente en I.

La derivada nos permite localizar puntos importantes de la gráfica como los puntos máximos y los puntos mínimos de la función, que son los puntos donde se alcanzan los valores máximo y mínimo (respectivamente) de la función. A esos puntos los llamamos PUNTO MÁXIMO ABSOLUTO y PUNTO MÍNIMO ABSOLUTO.

A los puntos que son máximos o mínimos pero sólo en un entorno alrededor de ellos se les llama PUNTO MÁXIMO LOCAL y PUNTO MÍNIMO LOCAL. Todos los máximos o mínimos absolutos son también máximos y mínimos locales (respectivamente).

TEOREMA
Si f es derivable en x_0, y x_0 es un punto máximo o mínimo local de f en un intervalo abierto (a, b), entonces $f'(x_0) = 0$.

Por tanto, interesa distinguir los puntos donde $f'(x_0) = 0$ en una representación gráfica. Los llamaremos PUNTOS CRÍTICOS o PUNTOS SINGULARES.

Localización de extremos:
Los extremos absolutos o locales de una función f continua en un intervalo $[a, b]$ se encuentran necesariamente en algunos de los siguientes conjuntos de puntos:

1. Los puntos singulares de f en (a, b).
2. Los extremos a y b.
3. Los puntos $x \in (a, b)$ tales que f no es derivable en x.

Para distinguir los puntos máximos de mínimos locales es útil el siguiente resultado:

TEOREMA

1. Si $f' > 0$ a la izquierda de x y $f' < 0$ a la derecha, entonces x es un punto máximo local.
2. Si $f' < 0$ a la izquierda de x y $f' > 0$ a la derecha, entonces x es un punto mínimo local.
3. Si f' tiene el mismo signo a la derecha y a la izquierda de x, entonces x no es un punto máximo ni un punto mínimo local.

En una representación gráfica hemos de calcular los intervalos en que f' es positiva y donde es negativa. Ello nos permite estudiar el crecimiento de f y clasificar sus extremos, de los que hemos de averiguar si son absolutos o relativos. La segunda derivada de la función también nos da información interesante.

TEOREMA

1. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x_0.
2. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x_0.

3.6.3. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Por último vamos a caracterizar la curvatura: Una función f es CONVEXA en un intervalo de su dominio si el conjunto que queda por encima de su gráfica es convexo visto desde abajo. Decimos que f es CÓNCAVA en un intervalo si este conjunto es cóncavo visto desde abajo.

La segunda derivada resulta muy útil para estudiar la curvatura:

TEOREMA

1. Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es convexa en ese intervalo.
2. Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava en ese intervalo.

Los puntos x_0 tales que f tiene distinta curvatura a su derecha de la que tiene a su izquierda se llaman PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Es decir, los puntos de inflexión son puntos en que la función pasa de cóncava a convexa o viceversa. Los puntos de inflexión pueden estar donde $f''(x) = 0$ o donde no existe $f''(x)$. Si existe f'' a la izquierda y a la derecha de x_0 y los signos de f'' a uno y otro lado son distintos, entonces x_0 es un punto de inflexión. Si x_0 es un punto de inflexión y existe $f'(x_0)$, entonces la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ cruza la gráfica de f en ese punto.

En ocasiones la segunda derivada es muy complicada de manejar. En la mayoría de los casos, podremos obtener una gráfica de f bastante precisa aún sin utilizar f''.

Para acabar la gráfica, calculamos el valor de f en los puntos singulares, puntos donde no exista la derivada, extremos del dominio (si es que f está definida allí) y puntos de inflexión, así como los cortes de la gráfica con los ejes, siempre que sea posible calcularlos. También estudiamos los signos de f.

3.7. Aplicaciones

En muchos contextos prácticos es necesario optimizar, maximizar o minimizar, alguna cosa: tiempo, precio, material, espacio, etc., es decir, calcular el máximo o mínimo de una cierta función. El procedimiento para encontrar la solución es el siguiente:

1. Plantear el problema, escribiendo todos los datos de los que disponemos.

2. Obtener una función que dependa de una variable, utilizando las relaciones que conozcamos para poner las demás variables en términos de la que dejamos.

3. Encontrar el máximo (o mínimo) de dicha función.

4. Si fuera necesario, calcular cuánto valen para ese valor encontrado, las otras variables que intervenían en el problema.