Álgebra Lineal y Geometría

Grado en Física

Ejercicios de autoevaluación. Temas 1–4

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

Nota de los autores:

Las siguientes hojas presentan ejercicios básicos que cubren todo los temas 1 al 4 de la asignatura *Álgebra Lineal y Geometría* del Grado en Física. Los ejercicios de cada hoja están pensados para un tiempo de 45–50 minutos.

Los ejercicios de autoevaluación van acompañados de su correspondiente solución (que puede muy bien no ser la única posible); y están ordenados por temas. En algunos casos, a título orientativo, se incluye la puntuación por problema, cuando no aparece se entiende que todos los problemas tendrían el mismo peso.

Ejercicio 1.– Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hallar:

a) C^t.

b) $A + C$.

c) $(1/2)A$.

d) AB.

Ejercicio 2.– Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo k.

a) Demostrar que la matriz $A + A^t$ es simétrica.

b) Demostrar que la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.

c) Supongamos que A no es simétrica y que $n \geq 3$. Estudiar, si tomamos una combinación lineal $\alpha A + \beta A^t$, cuáando obtenemos una matriz simétrica o antisimétrica.

Ejercicio 1.– Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & i & i \\ -1 & x & 1 & i & i \\ -1 & -1 & x-2 & i & i \\ -1 & -1 & -1 & x & i \\ -1 & -1 & -1 & -i & x-2i \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.– Responder a las siguientes cuestiones:

a) Sean A, B matrices cuadradas de orden n tales que $A \cdot B = 0_n$. Si A es invertible, calcular B.
b) Si $A = A^{-1}$, calcular A^2.

Ejercicio 3.– Determinar el rango de la siguiente matriz, según los valores del parámetro a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.– Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A|$ es un polinomio en x de grado máximo 3:

$$|A| = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3.$$

Determinar el coeficiente a_1.

Ejercicio 2.– Consideremos la matriz:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular Z^2 y Z^3.
b) Hallar $(I_3 - Z)(I_3 + Z + Z^2)$.
c) Consideramos la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que M es regular. Hallar su inversa utilizando el apartado b).

Ejercicio 3.– Demostrar que I_2 tiene (estrictamente) más de 2 "raíces cuadradas" en $M(2;\mathbb{R})$, es decir que existen por lo menos 3 matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $A^2 = I_2$.

Ejercicio 1 (3 puntos).– Recordamos el principio de inducción: Para probar que un enunciado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ es suficiente probar que:

- Es cierto para $n = 1$.
- Supuesto que es cierto para un n arbitrario, lo es para $n + 1$.

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar por inducción que $A^n = 2^{n-1}A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar $A^2 + 2AB + B^2$ y $(A + B)^2$.

Ejercicio 3 (4 puntos).– Sean $A, B \in \mathcal{M}(n; k)$, matrices triangulares superiores. Probar que AB también lo es.

Ejercicio 1 (7 puntos).– Clasificar y resolver, cuando sea posible, en función del parámetro α, el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_4 & = & 2\alpha \\ & & x_2 & + & x_4 & = & \alpha \\ \alpha x_1 & & & - & x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2 (3 puntos).– Responder razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Dado un sistema compatible de ecuaciones $AX^t = B^t$, el sistema es homogéneo (esto es, B es la matriz nula) si y sólo si dadas dos soluciones del sistema su suma (como matrices columna, por ejemplo) también es solución del sistema.

Ejercicio 1 (3 puntos).– Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$. Probar que $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Sean f y g las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} \mid arg(z) \in [0, \pi)\} \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Estudiar si f y g son inyectivas y/o sobreyectivas. Si es posible, responder las mismas preguntas para $f \circ g$ y para $g \circ f$. Si no es posible, explicar por qué.

Ejercicio 3 (4 puntos).– Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.– Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hallar:

a) C^t.

b) $A + C$.

c) $(1/2)A$.

d) AB.

Solución: Todos los cálculos son elementales:

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A+C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.– Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo k.

a) Demostrar que la matriz $A + A^t$ es simétrica.

b) Demostrar que la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.

c) Supongamos que A no es simétrica y que $n \geq 3$. Estudiar, si tomamos una combinación lineal $\alpha A + \beta A^t$, cuándo obtenemos una matriz simétrica o antisimétrica.

Solución: En las condiciones del problema:

a) Se tiene $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t$. Como $(A^t)^t = A$, $(A + A^t)^t = A + A^t$, es decir la matriz $A + A^t$ es simétrica.

b) Se tiene $(A - A^t)^t = A^t + (-A^t)^t$. Como $(-A^t)^t = -(A^t)^t = -A$, $(A - A^t)^t = -(A - A^t)$, es decir la matriz $A - A^t$ es antisimétrica.

c) Tomamos una combinación $\alpha A + \beta A^t$. Si fuera simétrica

$$\alpha A + \beta A^t = (\alpha A + \beta A^t)^t = \alpha A^t + \beta A \implies 0_n = (\alpha - \beta)A + (\beta - \alpha)A^t.$$

Sea ahora algún (i, j) tal que $a_{ij} \neq a_{ji}$, que existe porque A no es simétrica. Tenemos que el elementos (i, j) de $(\alpha - \beta)A + (\beta - \alpha)A^t$ es nulo, o sea

$$(\alpha - \beta)a_{ij} + (\beta - \alpha)a_{ji} = 0 \implies \alpha(a_{ij} - a_{ji}) + \beta(a_{ji} - a_{ij}) = 0,$$

por lo cual, para que haya solución, ha de ser $\alpha = \beta$ (que es, salvo producto por escalar, el caso a)). El caso antisimétrico es análogo.

Ejercicio 1.– Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & i & i \\ -1 & x & 1 & i & i \\ -1 & -1 & x-2 & i & i \\ -1 & -1 & -1 & x & i \\ -1 & -1 & -1 & -i & x-2i \end{vmatrix}$$

Solución: Este es un ejercicio sencillo de aplicación de las propiedades básicas de los determinantes. Llamemos D al determinante buscado. Entonces, sumando a cada fila, de la segunda a la quinta, la primera, obtenemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & i & i \\ 0 & x+1 & 2 & 2i & 2i \\ 0 & 0 & x-1 & 2i & 2i \\ 0 & 0 & 0 & x+i & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-i \end{vmatrix} = 1 \cdot (x+1)(x-1)(x+i)(x-i) = x^4 - 1.$$

Ejercicio 2.– Responder a las siguientes cuestiones:

a) Sean A, B matrices cuadradas de orden n tales que $A \cdot B = 0_n$. Si A es invertible, calcular B.
b) Si $A = A^{-1}$, calcular A^2.

Solución: Ambos apartados son fáciles; utilizando las propiedades de la matriz inversa. En primer lugar:

$$A \cdot B = 0_n \implies A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0_n \implies I_n \cdot B = B = 0_n.$$

En segundo lugar

$$A^2 = A \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n.$$

Ejercicio 3.– Determinar el rango de la siguiente matriz, según los valores del parámetro a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Usaremos el método del orlado. Si llamamos A a la matriz, es obvio que $\operatorname{rg}(A) \geq 2$, ya que tenemos un menor (en realidad varios) de orden 2 distinto de cero. Por ejemplo, podemos tomar el formado por las dos primeras filas y las columnas primera y cuarta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por el método del orlado tenemos que estudiar entonces los posibles menores de orden 3 *que contengan al escogido de orden* 2. Sólo hay dos tales menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 5a + 40 - (-2 + 50 + 2a) = 3a - 9,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = a + 24 - 5 - (2a + 30 - 2) = -a - 9.$$

Luego un menor se anula para $a = 3$ y el otro para $a = -9$. Así pues, sea quien sea a, siempre hay un menor de orden 3 distinto de cero, luego $\text{rg}(A) = 3$ (obviamente no puede ser mayor; sólo tiene tres filas).

Ejercicio 1.– Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A|$ es un polinomio en x de grado máximo 3:

$$|A| = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3.$$

Determinar el coeficiente a_1.

Solución: El desarrollo con respeto a la primera fila nos proporciona la solución:

$$a_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Calculamos el determinante por cualquier método. Aquí lo hacemos por desarrollo directo: $a_1 = -((8+4-1)-(1-4+8)) = -(11-5) = -6$.

Ejercicio 2.– Consideremos la matriz:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular Z^2 y Z^3.
b) Hallar $(I_3 - Z)(I_3 + Z + Z^2)$.
c) Consideramos la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que M es regular. Hallar su inversa utilizando el apartado b).

Solución: Los dos primeros apartados son elementales:
a) Se calcula que

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $Z^3 = 0_{3\times 3}$.
b) Más fácil aún:

$$\begin{aligned} (I_3 - Z)(I_3 + Z + Z^2) &= I_3(I_3 + Z + Z^2) - Z(I_3 + Z + Z^2), \\ &= (I_3 + Z + Z^2) - (Z + Z^2 + Z^3), \\ &= I_3 - Z^3, \\ &= I_3. \end{aligned}$$

ya que $Z^3 = 0_{3\times 3}$.

c) La matriz M es triangular, por lo tanto su determinante es el producto de sus elementos diagonales. Vale 1, luego es distinto de 0 y M es regular. Notemos que $M = I_3 - Z$. En b) hemos encontrado una matriz X tal que $MX = I_3$ (es $X = I_3 + Z + Z^2$). Por unicidad de la inversa, $X = M^{-1}$. Explícitamente,

$$M^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.– Demostrar que I_2 tiene (estrictamente) más de 2 "raíces cuadradas" en $M(2;\mathbb{R})$, es decir que existen por lo menos 3 matrices A de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $A^2 = I_2$.

Solución: Exhibimos tres elementos de $M(2;\mathbb{R})$ cuyo cuadrado es I_2: por ejemplo I_2, $-I_2$ y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Hay muchos más ...)

Ejercicio 1 (3 puntos).– Recordamos el principio de inducción: Para probar que un enunciado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ es suficiente probar que:

- Es cierto para $n = 1$.
- Supuesto que es cierto para un n arbitrario, lo es para $n + 1$.

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar por inducción que $A^n = 2^{n-1}A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Siguiendo el principio de inducción, primero comprobamos que es cierto el caso $n = 1$, lo cual es trivial porque

$$A^1 = A = 2^0 A.$$

Supuesto entonces cierto el caso n, o sea, dando por cierto que $A^n = 2^{n-1}A$, tenemos que demostrar que la fórmula es cierta para $n + 1$. Pero, utilizando esta hipótesis y las propiedades elementales del producto por escalares,

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A \cdot 2^{n-1}A = 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2^n A,$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar $A^2 + 2AB + B^2$ y $(A + B)^2$.

Solución: Basta realizar las operaciones, teniendo en cuenta que $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2$. El resultado es

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}, \quad (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 (4 puntos).– Sean $A, B \in \mathcal{M}(n; k)$, matrices triangulares superiores. Probar que AB también lo es.

Solución: Pongamos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Al ser triangulares superiores $a_{ij} = b_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Escribimos $AB = (c_{ij})$ y supongamos que $i > j$. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ij}b_{jj} + ... + a_{ii}b_{ij} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

El tercer sumando que hemos escrito es el primer sumando en el que el primer factor puede ser distinto de 0, por ser $a_{il} = 0$ cuando $i > l$. Análogamente, a partir del segundo sumando que hemos escrito, el segundo factor es 0, por ser B triangular superior. Por tanto la suma total es 0 y AB es triangular superior.

Ejercicio 1 (7 puntos).– Clasificar y resolver, cuando sea posible, en función del parámetro α, el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_4 & = & 2\alpha \\ & & x_2 & + & x_4 & = & \alpha \\ \alpha x_1 & & & - & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución: La matriz ampliada del sistema es:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & \alpha & 0 & -1 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

El rango de A es obviamente mayor o igual que 2; y es 3 si y sólo si es distinto de 0 el determinante:

$$\left|\begin{array}{ccr} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & -2 \end{array}\right| = \alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha - 1)(\alpha + 2),$$

por lo que los casos que hay que estudiar separadamente son $\alpha = 1, -2$.

Caso A. ($\alpha \neq 1, -2$).– En este caso hemos visto que rg$(A) = 3$, obviamente igual que rg$(\overline{A})$, por lo que el sistema es compatible indeterminado, y debemos tomar una incógnita como parámetro. La forma de hacerlo, recordemos, es escoger la incógnita cuya columna no aparezca en el menor que nos ha dado el rango de A. Esta incógnia es x_3, por lo que el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_4 & = & 2\alpha \\ & & x_2 & + & x_4 & = & \alpha \\ \alpha x_1 & & & - & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Notemos que parece el mismo sistema que antes, pero no lo es: ahora es un sistema en x_1, x_2, x_4 y es compatible determinado. Se puede utilizar cualquier método para resolverlo (regla de Cramer, eliminación,...). En cualquier caso, la solución es:

$$x_1 = \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 2},\ x_2 = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 2},\ x_3 = \lambda,\ x_4 = \frac{\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha + 2}, \qquad \lambda \in k.$$

Caso B. ($\alpha = 1$).– En este caso la matriz ampliada es

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

y un cálculo sencillo, por ejemplo por el método del orlado, nos dice que rg(A) =rg$(\overline{A}) = 2$. Claramente el menor formado por las dos últimas filas y las dos primeras columnas es distinto de 0, por lo que podemos descartar la primera ecuación, convertir x_3 y x_4 en parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente; y quedarnos con el sistema de Cramer

$$\left\{\begin{array}{rrcl} & x_2 & = & 1 - \lambda_2 \\ x_1 & & = & 1 + 2\lambda_2 \end{array}\right.$$

que está, de hecho, resuelto. La solución es, por tanto,

$$x_1 = 1 + 2\lambda_2,\ x_2 = 1 - \lambda_2,\ x_3 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in k.$$

Caso B. ($\alpha = -2$).– La matriz ampliada es

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

y, en este caso $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(\overline{A}) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Responder razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Dado un sistema compatible de ecuaciones $AX^t = B^t$, el sistema es homogéneo (esto es, B es la matriz nula) si y sólo si dadas dos soluciones del sistema, su suma (como matrices columna, por ejemplo) también es solución del sistema.

Solución: La afirmación es correcta. En efecto, si el sistema es homogéneo y S_1^t y S_2^t son dos soluciones entonces tenemos que

$$A\left(S_1^t + S_2^t\right) = AS_1^t + AS_2^t = 0^t + 0^t = 0^t,$$

de donde $S_1^t + S_2^t$ también es solución del sistema. En el otro sentido, supongamos que S_1^t y S_2^t son soluciones y que también lo es $S_1^t + S_2^t$. Entonces:

$$B^t = A\left(S_1^t + S_2^t\right) = AS_1^t + AS_2^t = B^t + B^t = 2B^t,$$

de donde tiene que ser $B^t = 0^t$.

Ejercicio 1 (3 puntos).– Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n; k)$. Probar que $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Solución: Haremos $I_m \cdot A = A$, porque la otra igualdad es muy similar. Escribimos $I_m = (e_{ij})$, donde e_ij es 0 cuando $i \neq j$, y $e_{ii} = 1$. El elemento (i, j) de $I_m \cdot A$, según la fórmula del producto, es

$$\sum_{l=1}^{m} e_{il} a_{lj},$$

y los primeros factores de cada sumando son todos 0, salvo para $i = l$, por lo que el sumatorio se reduce a $e_{ii} a_{ij} = a_{ij}$. Así, queda probada la igualdad elemento a elemento y, por tener el mismo orden, se tiene que $I_m \cdot A$.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Sean f y g las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} \mid arg(z) \in [0, \pi)\} \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Estudiar si f y g son inyectivas y/o sobreyectivas. Si es posible, responder las mismas preguntas para $f \circ g$ y para $g \circ f$. Si no es posible, explicar por qué.

Solución: Claramente f no es inyectiva ni sobreyectiva. Por un lado, por ejemplo $f(1) = f(-1)$, luego no es inyectiva. Pero además es claro que los enteros negativos no tienen original que vaya sobre ellos, por lo que tampoco es sobreyectiva.

La aplicación g sí que es inyectiva, ya que si $g(y) = g(y')$, entonces $\sqrt{y} = \sqrt{y'}$ y, elevando al cuadrado, $y = y'$. Pero no es sobreyectiva de manera muy simple. Por ejemplo, $\sqrt[4]{2}$ no es la raíz cuadrada de un racional.

La aplicación $f \circ g$ no puede considerarse, ya que, por ejemplo, $g(-1) = i$, pero $f(i)\Delta$ no tiene sentido. Sin embargo, $g \circ f$ sí que puede considerarse, pues el conjunto imagen de f es $\mathbb{Z}$, que está contenido en el conjunto original de g. En concreto

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} \mid arg(z) \in [0, \pi)\} \\ x & \longmapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

Sin embargo $g \circ f$ no es inyectiva (vale el ejemplo de f) ni sobreyectiva (vale el ejemplo de g).

Ejercicio 3 (4 puntos).– Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Solución: Hay muchas formas de resolver este determinante. Por ejemplo, usando las combinaciones lineas de filas,

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \overset{F_3-F_2,\ F_4-F_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-x & x-2 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

y ahora, desarrollando por los adjuntos de la primera columna, obtenemos

$$(-1)^{1+1}(x-1)\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 2-x & x-2 & 0 \\ 2-x & 0 & x-2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-x & x-2 & 0 \\ 2-x & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

Aplicando ahora la regla de Sarrus en ambos determinantes

$$\begin{aligned} (x-1)\left[(x-1)(x-2)^2+2(x-2)^2\right]-3(x-2)^2 &= (x-2)^2\left[(x-1)(x+1)-3\right] \\ &= (x-2)^3(x+2). \end{aligned}$$

Ejercicio 1.– Responder a las siguientes cuestiones:

a) Hallar el conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales de incógnitas x, y, z, t:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & & & = & 3 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & 4y & + & 2z & + & 6t & = & 5 \\ x & - & 2y & - & z & & & = & -1 \end{array}\right.$$

b) Hallar: (i) un ejemplo de solución particular del sistema (S), y: (ii) el conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del sistema homogéneo (S') asociado a (S).

c) El conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del sistema homogéneo (S') es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial para la suma y el producto por escalares usuales (el ejercicio no pide justificación de esto). Hallar un sistema generador de este espacio vectorial.

Ejercicio 2.– Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 709 \\ 1 & 1 & 2 & 805 \\ 1 & 1 & 2 & 1543 \end{pmatrix}$$

Demostrar que su última fila es combinación lineal de las dos primeras (en este ejercicio no se exige que se halle la combinación lineal).

Ejercicio 1.– Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo cuando sea posible

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & - & x_4 & = & \lambda+2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.– Estudiar si son o no linealmente independientes los siguientes vectores, en cada uno de los espacios vectoriales indicados:

(a) En $V = \mathbb{C}^3$, los vectores $\underline{v}_1 = (1, i, 0),\ \underline{v}_2 = (-1, 0, 2),\ \underline{v}_3 = (-1+2i, -2, 2)$.

(b) En $V = \mathcal{M}(2\times 3; \mathbb{Q})$, los vectores

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) En $V = \mathbb{Q}[X]$, los vectores $P_1 = 1 - X,\ P_2 = 1 + X,\ P_3 = 12$.

Ejercicio 1.– Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & & & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & + & t & = & -i \\ 2x & & & + & 5z & + & t & = & 2-i \end{array}\right.$$

Resolver este sistema por la regla de Cramer.

Ejercicio 2.– En el $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $V = \mathbb{Q}[X]_2$ (polinomios nulos o de grado inferior o igual a 2, con coeficientes en $\mathbb{Q}$), consideramos los tres polinomios:

$$P_1 = X^2 - X, \quad P_2 = X^2 + X, \quad P_3 = X^2 - 1.$$

a) Demostrar que todo elemento de V es combinación lineal de P_1, P_2 y P_3. Deducir de esto que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V.

b) Hallar otra demostración del hecho que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V. Para esto, demostrar en primero que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es linealmente independiente (utilizando evaluaciones en 0, 1 y -1). Deducir por el argumento adecuado que es una base.

Ejercicio 1.– Estudiar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son o no subespacios vectoriales:

$$L_1 = \{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=1\}$$
$$L_3 = \langle\, (1,1,-2),\ (2,1,3)\,\rangle$$

Ejercicio 2.– Sea $H_1 \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial dado por

$$H_1 \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Calcular una base de H_1.

Sea ahora $H_2 \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial dado por

$$H_2 = \langle (1,0,1,1,1), (1,0,0,0,0), (0,0,1,1,1) \rangle.$$

Calcular una base y unas ecuaciones implícitas independientes de H_2.

Ejercicio 1.– Sea V es $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $\mathbb{Q}[X]_2$. Consideramos:

$$\begin{array}{rcr} P_0 & = & (1/2)X^2 - (3/2)X + 1, \\ P_1 & = & 2X - X^2, \\ P_2 & = & (1/2)X^2 - (1/2)X. \end{array}$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia ordenada de estos tres polinomios, es decir $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$. Sea $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.

(i) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de V.

(ii) Dar la matriz de cambio de base $M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

(iii) Utilizar (ii) para encontrar las coordenadas de $Q = X^2 - X + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 2.– En el $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $V = \mathbb{Q}[X]_2$, consideramos el subconjunto S de los polinomios $P(x)$ tales que $P'(1) = 0$.

(i) Dar un ejemplo de elemento de S, distinto del polinomio 0.

(ii) Demostrar que S es un subespacio vectorial de V.

(iii) Hallar una base de S.

Ejercicio 3.– En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, consideramos los vectores

$$\underline{u}_1 = (1, 2, 3, 4, 5), \qquad \underline{u}_2 = (-2, -1, 0, 1, 2), \qquad \underline{u}_3 = (0, 1, 1, 1, 1)$$

(i) Demostrar que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ es linealmente independiente.

(ii) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$ tal que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\} \subset \mathcal{B}$.

Ejercicio.– En el espacio vectorial $V = \mathcal{M}(2;\mathbb{R})$, consideremos los siguientes subespacios vectoriales:

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Hallar una base de $L_1 \cap L_2$. (Nota: La base debe ser un conjunto de matrices).
2. ¿Son L_1 y L_2 variedades complementarias?
3. ¿Cuál es la dimensión de $L_1 + L_2$?

Ejercicio 1 (6 puntos).– En el espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^4$ se consideran las siguientes familias de vectores:

$$\begin{aligned} L &= \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1)\} \\ G &= \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (2,1,1,1),\ (1,-1,2,1),\ (0,1,0,0),\ (-1,2,3,0)\} \end{aligned}$$

a) Demostrar que L es un conjunto linealmente independiente.
b) Demostrar que G es un sistema generador de V.
c) Hallar razonadamente una base $\mathcal{B}$ de V tal que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Ejercicio 2 (4 puntos).– Se considera el espacio vectorial $\mathbb{C}[X]_3$ de polinomios con coeficientes complejos y grado menor o igual que 3. Determinar razonadamente si el conjunto

$$\{1 + iX,\ -X^2 - iX^3,\ X - X^3\}$$

es o no linealmente independiente.

Ejercicio 1 (6 puntos).– Se considera el espacio vectorial $V = \mathcal{M}(2;\mathbb{Q})$. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si el conjunto $\mathcal{R}$ es o no una base de V. En caso afirmativo, hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ de una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 (4 puntos).– Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}[X]_n$ de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, se considera el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (X-\alpha)^i \mid i = 0, \dots, n \right\}.$$

Determinar razonadamente si el conjunto $\mathcal{S}$ es o no una base de $\mathbb{R}[X]_n$.

Ejercicio.– En el espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios vectoriales dados por

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_3 & & & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 = \langle\, (1,1,1,1),\ (1,0,1,1) \rangle.$$

1) Hallar las dimensiones de $L_1 + L_2$ y de $L_1 \cap L_2$, dando bases de ambas (4 puntos).

2) Estudiar si $V = L_1 \oplus L_2$. En caso de que la respuesta sea negativa, hallar un sistema de ecuaciones que defina un subespacio complementario de L_2 (3 puntos).

3) Dar una base ortonormal de L_1, utilizando el procedimiento de Gram–Schmidt (3 puntos).

Ejercicio 1.– Responder a las siguientes cuestiones:

a) Hallar el conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del siguiente sistema de ecuaciones lineales de incógnitas x, y, z, t:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & & & = & 3 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & 4y & + & 2z & + & 6t & = & 5 \\ x & - & 2y & - & z & & & = & -1 \end{array}\right.$$

b) Hallar: (i) un ejemplo de solución particular del sistema (S), y: (ii) el conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del sistema homogéneo (S') asociado a (S).

c) El conjunto de las soluciones en $\mathbb{R}^4$ del sistema homogéneo (S') es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial para la suma y el producto por escalares usuales (el ejercicio no pide justificación de esto). Hallar un sistema generador de este espacio vectorial.

Solución: a) La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para resolver el sistema, como ilustración del uso de matrices escalonadas, *que no exigiremos en este curso*, escalonamos esta matriz por medio de operaciones elementales sobre sus filas, cambiando A a matrices ampliadas de sistemas equivalentes a (S).

$$\left\{\begin{array}{ccc} F_2 & \leftarrow & F_2 - F_1 \\ F_3 & \leftarrow & F_3 - F_1 \\ F_4 & \leftarrow & F_4 - F_1 \end{array}\right. \quad \text{da} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} F_3 & \leftarrow & F_3 - 4F_2 \\ F_4 & \leftarrow & F_4 + 2F_2 \end{array}\right. \quad \text{da} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

La operación $F_4 \leftarrow F_4 + 2F_2$ lleva la última fila en una fila nula, que podemos quitar. Obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Está escalonada y ya se ve que el sistema correspondiente es compatible indeterminado, con parámetro t (pero esta precisión no se pide en el ejercicio). Ahora hacemos $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$, lo que da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y corresponde al sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 1 \\ & y & & + & 2t & = & 0 \\ & & z & - & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

El conjunto de las soluciones del sistema en $\mathbb{R}^4$ es:

$$\{(1-2\,t;-2\,t;2+2\,t;t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}.$$

b) Un ejemplo de solución particular del sistema es $(1;0;2:0)$ (obtenida con $t=0$). El conjunto de las soluciones de (S) es el conjunto de las sumas de una solución particular con las soluciones de (S'). Por lo tanto, se obtienen las soluciones de (S') restando a las soluciones de (S) una solución particular de (S). Se tiene, para cada $t\in\mathbb{R}$:

$$(1-2\,t;-2\,t;2+2\,t;t)-(1;0;2;0)=(-2\,t;-2\,t;2\,t;t).$$

Por lo tanto, el conjunto de las soluciones de (S') en $\mathbb{R}^4$ es:

$$\{(-2\,t;-2\,t;2\,t;t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}.$$

c) Las soluciones de (S') son los vectores de la forma $t\,(-2;-2;2;1)$ para $t\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\{(-2;-2;2;1)\}$ es un sistema generador del conjunto de estas soluciones.

Ejercicio 2.– Consideremos la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 709 \\ 1 & 1 & 2 & 805 \\ 1 & 1 & 2 & 1543 \end{pmatrix}$$

Demostrar que su última fila es combinación lineal de las dos primeras (en este ejercicio no se exige que se halle la combinación lineal).

Solución: La última fila de A es combinación lineal de las dos primeras si y solo si el rango de A es igual al rango de su submatriz de las dos primeras filas (en clase lo hemos enunciado para columnas pero se ve que el mismo resultado vale para filas cambiando la matriz A por su traspuesta). Llamemos B a esta submatriz de las dos primeras filas. Claramente, la segunda y tercera columna de A son múltiplos de la primera, por lo tanto podemos quitarlas sin cambiar el rango. Lo mismo vale para B. Así

$$\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 709 \\ 1 & 805 \\ 1 & 1543 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg}(B)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 709 \\ 1 & 805 \end{pmatrix}.$$

Ambas matrices tienen rango 2 ya que tienen su primero menor de orden 2×2, que es

$$\begin{vmatrix} 1 & 709 \\ 1 & 805 \end{vmatrix},$$

distinto de cero (vale $805-709$, no es necesario hacer la cuenta), y las matrices no pueden tener rango mayor ya que tienen solo dos columnas. Por lo tanto, $\mathrm{rg}(B)=\mathrm{rg}(A)$, lo que demuestra que la última fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

Ejercicio 1.– Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema, y resolverlo cuando sea posible

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & - & x_4 & = & \lambda+2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución: Estudiamos en primer lugar el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & \lambda = 1 \\ 2 & \text{si} & \lambda \neq 1 \end{array}\right.$$

Cuando $\lambda = 1$ tenemos que la matriz ampliada verifica

$$\mathrm{rg}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \implies \text{S.I.}$$

Cuando $\lambda \neq 1$ tenemos

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\overline{A}\right) = 2 < 4 \implies \text{S.C.I.}$$

Lo resolveremos siguiendo el Teorema de Rouché–Fröbenius. Para ello, buscamos un menor de orden 2 en A, que puede ser, por ejemplo, el formado por las filas 1 y 2 y las columnas 3 y 4. El sistema queda, entonces:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda x_3 & - & x_4 & = & \lambda+2-x_1-x_2 \\ x_3 & - & x_4 & = & 2-x_1-x_2 \end{array}\right.$$

Y procedemos a resolverlo como queramos (Cramer, triangulación, o alguno de los métodos elementales de Secundaria). En cualquier caso, queda:

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \frac{\lambda}{\lambda-1},\ x_4 = \alpha+\beta-2+\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ejercicio 2.– Estudiar si son o no linealmente independientes los siguientes vectores, en cada uno de los espacios vectoriales indicados:

(a) En $V = \mathbb{C}^3$, los vectores $\underline{v}_1 = (1, i, 0),\ \underline{v}_2 = (-1, 0, 2),\ \underline{v}_3 = (-1+2i, -2, 2)$.

(b) En $V = \mathcal{M}(2\times 3; \mathbb{Q})$, los vectores

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) En $V = \mathbb{Q}[X]$, los vectores $P_1 = 1 - X,\ P_2 = 1 + X,\ P_3 = 12$.

Solución: El caso (a) es muy sencillo porque, al estar en el caso $V = k^n$, basta hallar el rango de la matriz formada por los vectores. En nuestro caso, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1+2i \\ i & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i(-1+2i)+4+2i = 0$$

tenemos que el rango es menor que 2, luego los vectores son linealmente dependientes.

Para el caso (b), tomemos una combinación lineal arbitrario e igualémosla al vector $\underline{0}$, que en este caso es la matriz $0_{2\times 3}$.

$$0_{2\times 3} = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \begin{pmatrix} -\alpha-\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \gamma \\ -\alpha-\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \gamma \end{pmatrix}.$$

De la tercera columna podemos deducir $\gamma = 0$, de donde, junto con la primera, sabemos que $\alpha = 0$ y, finalemente, al sustituir en la segunda obtenemos $\beta = 0$. Así, los coeficientes han de ser necesariamente 0, por lo que A_1, A_2, A_3 son linealmente independientes.

Por último, en el caso (c) actuamos de forma parecida (ahora el vector $\underline{0}$ es el polinomio 0):

$$0 = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \alpha(1-X) + \beta(1+X) + 12\gamma = (\alpha+\beta+12\gamma) + (-\alpha+\beta)X,$$

donde observamos que tenemos soluciones no nulas; por ejemplo

$$\alpha = \beta = 1,\ \gamma = \frac{-1}{6}.$$

Ejercicio 1.– Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & & & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & + & t & = & -i \\ 2x & & & + & 5z & + & t & = & 2-i \end{array}\right.$$

Resolver este sistema por la regla de Cramer.

Solución: El menor de las dos primeras filas y de las dos primeras columnas vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

No es nulo. Para verificar que es un menor no nulo máximo, basta verificar que todos los menores de orden 3 que lo orlan (es decir que lo amplían) son nulos. Son tres estos menores: son las de las columnas $1, 2, 3$, de las columnas $1, 2, 4$ y de las columnas $1, 2, 5$. Son respectivamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -i \\ 2 & 0 & 2-i \end{vmatrix}.$$

Les calculamos y obtenemos que todos son nulos, lo que demuestra que el menor considerado es máximo entre los menores no nulos.

Sea A'' la submatriz de las dos primeras filas de A'. Esta matriz A'' de rango 2 ya que su menor de las dos primeras columnas (calculado en **(i)**) es no nulo y que A'' tiene solo dos filas. También A' tiene rango 2 por tener un menor no nulo máximo de orden 2. Como A' y A'' tienen mismo rango, la tercera fila de A' tiene que ser combinación lineal de las filas de A''. Esto significa que la tercera ecuación en (S) es combinación lineal de las dos primeras. Quitarla del sistema (S) da por lo tanto un sistema equivalente, que es:

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & & & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & + & t & = & -i \end{array}\right.$$

El sistema (S') es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 1-z \\ & & 2y & = & -i-3z-t \end{array}\right.$$

Consideramos este sistema como un sistema $S''(z,t)$ de incógnitas x e y. Para cada valor posible de z y t, este sistema es de Cramer porque es un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas, y la matriz de los coeficientes del sistema es regular.

Aplicando entonces la regla de Cramer, vemos que las soluciones de $S''(z,t)$ son los pares (x,y) tales que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -i-3z-t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 0 & -i-3z-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}.$$

es decir, tales que:

$$x = \frac{2-i-5z-t}{2}, y = \frac{-i-3z-t}{2}.$$

En conclusión, para cada valor posible de z y t en $\mathbb{C}$, el conjunto de las soluciones de $S''(z,t)$ es el conjunto unitario:

$$\left\{\left(\frac{2-i-5z-t}{2}, \frac{-i-3z-t}{2}\right).\right\}.$$

Por lo tanto, el conjunto de las soluciones de (S) en $\mathbb{C}^4$ es:

$$\left\{(\frac{2-i-5z-t}{2}, \frac{-i-3z-t}{2}, z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{C}\right\}.$$

Ejercicio 2.– En el $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $V = \mathbb{Q}[X]_2$ (polinomios nulos o de grado inferior o igual a 2, con coeficientes en $\mathbb{Q}$), consideramos los tres polinomios:

$$P_1 = X^2 - X, \quad P_2 = X^2 + X, \quad P_3 = X^2 - 1.$$

a) Demostrar que todo elemento de V es combinación lineal de P_1, P_2 y P_3. Deducir de esto que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V.

b) Hallar otra demostración del hecho que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V. Para esto, demostrar en primero que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es linealmente independiente (utilizando evaluaciones en 0, 1 y -1). Deducir por el argumento adecuado que es una base.

Solución: Vamos a demostrar que para cada terna de números (b_0, b_1, b_2) en $\mathbb{Q}^3$, existen (a_1, a_2, a_3) en $\mathbb{Q}^3$ tales que

$$b_0 + b_1 X + b_2 X^2 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3. \tag{1}$$

Calculamos que

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = -a_3 + (-a_1 + a_2)X + (a_1 + a_2)X^2.$$

Dos polinomios son iguales si y solo si tienen los mismos coeficientes. Por lo tanto, (1) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales de incógnitas a_1, a_2, a_3:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & a_2 & & & = & b_2 \\ -a_1 & + & a_2 & & & = & b_1 \\ & & & - & a_3 & = & b_0 \end{array}\right.$$

Hacemos $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$ y obtenemos el sistema equivalente escalonado:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_1 & + & a_2 & & & = & b_2 \\ & & 2\,a_2 & & & = & b_1 + b_2 \\ & & & - & a_3 & = & b_0 \end{array}\right.$$

Este sistema siempre es compatible. Esto demuestra que todo elemento de V es combinación lineal de P_1, P_2 y P_3. Podemos concluir que $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una base de V, ya que es un sistema generador de cardinal igual a la dimensión de V, que es 3.

Para el segundo apartado, consideremos una relación lineal

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0.$$

Al evaluar los polinomios en 0, 1 y -1, se obtiene $-a_3 = 0$, $2a_2 = 0$, $2a_1 = 0$, que implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Esto demuestra que no hay relación lineal no trivial entre P_1, P_2 y P_3. Esto es, $\{P_1, P_2, P_3\}$ es linealmente independiente. Como tiene como cardinal la dimensión de V, se deduce que es una base de V.

Ejercicio 1.– Estudiar si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son o no subespacios vectoriales:

$$L_1 = \{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 1\}$$
$$L_3 = \langle\, (1,1,-2),\ (2,1,3)\, \rangle$$

Solución: El subconjunto L_1 es subespacio vectorial. Se puede ver de dos maneras: bien diciendo que L_1 es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$x_1 = x_2,\ x_1 = x_3;$$

bien escogiendo dos vectores de L_1,

$$\underline{u} = (a,a,a),\ \underline{v} = (b,b,b),$$

y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y viendo que

$$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = (\alpha a + \beta b,\ \alpha a + \beta b,\ \alpha a + \beta b) \in L_1.$$

Sin embargo, L_2 no es subespacio vectorial. Por ejemplo, no contiene al vector nulo. L_3 sí que lo es; casi por definición, ya que $\langle\, (1,1,-2),\ (2,1,3)\, \rangle$ es *el menor subespacio vectorial que contiene a* $(1,1,-2)$ *y a* $(2,1,3)$. Pues eso.

Ejercicio 2.– Sea $H_1 \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial dado por

$$H_1 \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Calcular una base de H_1.

Sea ahora $H_2 \subset \mathbb{R}^5$ el subespacio vectorial dado por

$$H_2 = \langle (1,0,1,1,1), (1,0,0,0,0), (0,0,1,1,1) \rangle.$$

Calcular una base y unas ecuaciones implícitas independientes de H_2.

Solución: En H_1 aplicamos Rouché–Fröbenius. Dado que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

tomamos un menor no nulo de orden 2; por ejemplo el formado por las dos primeras filas y las columnas 1 y 3. El sistema, una vez eliminada la tercera ecuación y degradados x_2, x_4, x_5 a parámetros, queda:

$$H_1 \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_3 & = & x_2 & - & x_4 & - & x_5 \\ & & x_3 & = & & & x_4 & - & 2x_5 \end{array} \right.$$

y, despejando x_1 y x_3 (MUY fácil), obtenemos:

$$x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \beta - 2\gamma,\ x_4 = \beta,\ x_5 = \gamma.$$

Así, una base de H_1 se pued obtener con las asignaciones

$$\begin{array}{lcl}
\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0 & \Longrightarrow & \underline{u}_1 = (1,1,0,0,0) \\
\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0 & \Longrightarrow & \underline{u}_2 = (-2,0,1,1,0) \\
\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1 & \Longrightarrow & \underline{u}_3 = (1,0,-2,0,1)
\end{array}$$

En lo tocante a H_2, tenemos un sistema generador que, por comodidad, reduciremos hasta una base. Dado que

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

por ejemplo, con el menor formado por las dos últimas columnas y las filas 1 y 3. Así, podemos quedarnos con los dos últimos vectores como base; ya que el primero es combinación lineal (de hecho, suma) de ellos. Como vimos en teoría, un sistema de ecuaciones implícitas independientes de H_2 es, entonces, orlando el menor escogido con anterioridad,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr}
\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \Longrightarrow & x_2 = 0 \\[2ex]
\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \Longrightarrow & x_3 - x_4 = 0 \\[2ex]
\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \Longrightarrow & x_3 - x_5 = 0
\end{array} \right.$$

Ejercicio 1.– Sea V es $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $\mathbb{Q}[X]_2$. Consideramos:

$$\begin{array}{rcr} P_0 & = & (1/2)X^2 - (3/2)X + 1, \\ P_1 & = & 2X - X^2, \\ P_2 & = & (1/2)X^2 - (1/2)X. \end{array}$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia ordenada de estos tres polinomios, es decir $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$. Sea $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.

(i) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de V.

(ii) Dar la matriz de cambio de base $M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

(iii) Utilizar (ii) para encontrar las coordenadas de $Q = X^2 - X + 1$ en la base $\mathcal{B}$.

Solución: Llamemos A la matriz de (P_1, P_2, P_3) en la base $\mathcal{C}$, es:

$$A = M(P_1, P_2, P_3)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $1/2$, es distinto de 0, por lo tanto esta matriz es regular, lo que demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de V.

En el segundo apartado, la matriz buscada, $M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$, es la matriz inversa de $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, y $M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ es la matriz A del primer apartado. Por lo tanto, tenemos que invertir A, y obtenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para el tercer apartado, se tiene $(Q)^t_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{C}, \mathcal{B})(Q)^t_{\mathcal{C}}$, por lo tanto:

$$(Q)^t_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Las coordenadas de Q en la base $\mathcal{B}$ son $(1, 1, 3)$, es decir:

$$Q = P_0 + P_1 + 3P_2.$$

Ejercicio 2.– En el $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $V = \mathbb{Q}[X]_2$, consideramos el subconjunto S de los polinomios $P(x)$ tales que $P'(1) = 0$.

(i) Dar un ejemplo de elemento de S, distinto del polinomio 0.

(ii) Demostrar que S es un subespacio vectorial de V.

(iii) Hallar una base de S.

Solución: Todo polinomio constante esta en S. Un ejemplo particular de elemento de S distinto de 0 es $P = 1$.

En cuanto a ii), se tiene que $P'(1) = 0$ cuando $P = 0$, por lo tanto $0 \in S$. Se tiene también que para cualesquiera P, Q en S y α, β en $\mathbb{Q}$, $(\alpha P + \beta Q)'(1) = \alpha P'(1) + \beta Q'(1) = 0$, por lo tanto $\alpha P + \beta Q \in S$. Esto demuestra que S es un subespacio vectorial de V.

Otra demostración posible: Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, entonces $P'(1) = a_1 + 2a_2$. Por lo tanto, S es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea ($a_1 + 2a_2 = 0$; en las incógnitas a_0, a_1, a_2) y sabemos que un tal conjunto siempre es un subespacio vectorial.

Para iii) Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, entonces $P'(1) = a_1 + 2a_2$. Desde luego, S admite como sistema de ecuaciones implicitas con respecto a la base $(1, X, X^2)$ el siguiente sistema de incógnitas a_0, a_1, a_2:

$$\{a_0 + 2\,a_2 = 0$$

Su conjunto de soluciones es:

$$\{(a_0, -2a_2, a_2) \,|\, a_0 \in \mathbb{Q}, a_2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Podemos descomponer $(a_0, -2\,a_2, a_2)$ en $a_0\,(1, 0, 0) + a_2\,(0, -2, 1)$, por lo que los polinomios 1 y $X^2 - 2\,X$ (que son los de coordenadas $(1, 0, 0)$ y $(0, -2, 1)$ en la base $(1, X, X^2)$) forman un sistema generador de S. Este sistema $\{1, X^2 - X\}$ es una base de S porque también es linealmente independiente, ya que:

$$\mathrm{rg} M(1, X^2 - 2\,X)_{(1,X,X^2)} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.– En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, consideramos los vectores

$$\underline{u}_1 = (1, 2, 3, 4, 5), \qquad \underline{u}_2 = (-2, -1, 0, 1, 2), \qquad \underline{u}_3 = (0, 1, 1, 1, 1)$$

(i) Demostrar que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ es linealmente independiente.

(ii) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$ tal que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\} \subset \mathcal{B}$.

Solución: La matriz de la familia de vectores es

$$M(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su primer menor de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 6) - (-4) = -3.$$

Como es distinto de 0, esto demuestra que $M(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ es de rango 3. Por tanto $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ es linealmente independiente.

Ahora ampliamos la matriz $M(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ a una matriz de orden 5×5 regular de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ve que esta matriz es regular desarrollando su determinante por la última columna, y luego otra vez por la última columna de la matriz de orden 4×4 obtenida:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ya hemos calculado este determinante de orden 3 en (ii) y es distinto de 0. La matriz 5×5 que hemos construido es $M(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5)$ con $\underline{e}_4 = (0,0,0,1,0)$ y $\underline{e}_5 = (0,0,0,0,1)$. Desde luego, $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$ que amplia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$.

Ejercicio.– En el espacio vectorial $V = \mathcal{M}(2;\mathbb{R})$, consideremos los siguientes subespacios vectoriales:

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Hallar una base de $L_1 \cap L_2$. (Nota: La base debe ser un conjunto de matrices).
2. ¿Son L_1 y L_2 variedades complementarias?
3. ¿Cuál es la dimensión de $L_1 + L_2$?

Solución: Fijamos en primer lugar una base para trabajar con coordenadas, que siempre es más cómodo. Por ejemplo, podemos considerar la base habitual:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomando entonces coordenadas, queda:

$$L_1 = \langle (1,0,0,1),\ (2,1,1,2) \rangle, \quad L_2 = \langle (0,1,1,1),\ (1,0,0,0) \rangle.$$

Para hallar $L_1 \cap L_2$ hay que unir sistemas de ecuaciones implícitas, así que empezamos calculando las de L_1. Como

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

(o sea, el sistema generador dado es base) un sistema de ecuaciones de L_1 es, por ejemplo,

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \implies \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \implies x_2 - x_3 = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \implies x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Análogamente para L_2, como

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

un sistema de ecuaciones de L_2 es

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} = 2, \implies \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \implies x_2 - x_3 = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \implies x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Así pues,

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

y, resolviendo por Rouché–Fröbenius de la forma habitual, tenemos que la solución general es

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda,$$

por lo que una base es

$$L_1 \cap L_2 = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle,$$

o, tal y como pide el enunciado,

$$L_1 \cap L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Evidentemente, L_1 y L_2 no pueden ser variedades complementarias, ya que, de serlo,

$$L_1 \oplus L_2 = V,$$

para lo cual tiene que ser $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}\}$, que no es el caso.

Por último, para hallar la dimensión de $L_1 + L_2$ recurrimos al Teorema de la dimensión:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ejercicio 1 (6 puntos).– En el espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^4$ se consideran las siguientes familias de vectores:

$$\begin{aligned} L &= \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1)\} \\ G &= \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (2,1,1,1),\ (1,-1,2,1),\ (0,1,0,0),\ (-1,2,3,0)\} \end{aligned}$$

a) Demostrar que L es un conjunto linealmente independiente.
b) Demostrar que G es un sistema generador de V.
c) Hallar razonadamente una base $\mathcal{B}$ de V tal que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Solución: Para ver que L es un conjunto linealmente independiente basta comprobar la caracterización dada en 3.2. En efecto, al ser

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

que es precisamente el número de vectores, el conjunto es linealmente independiente.

Para ver que G es sistema generador podemos usar una estrategia parecida. Dado que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

cualquier vector $\underline{v} \in \mathbb{Q}^4$ que añadamos a la matriz como columna no puede hacer crecer el rango (ya que el número de filas sigue siendo 4). Así pues, como vimos en 3.2., $\underline{v}$ es combinación lineal de los vectores de G. Por definición se tiene que G es sistema generador.

El apartado c) se puede responder siguiendo la demostración dada en 3.3. del hecho correspondiente. Recordemos que consiste en ir añadiendo a L vectores de G tales que el conjunto resultante siga siendo linealmente independiente. Al terminar habremos obtenido una base. En concreto

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

por lo que podemos añadir, para empezar $(2,1,1,1)$ a L. Continuamos notando que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

por lo que añadimos también $(1,-1,2,1)$. Si seguimos añadiendo vectores de G no vamos a lograr que el rango crezca por lo que una posible respuesta[1] es

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (2,1,1,1),\ (1,-1,2,1)\}$$

[1] Hay más, ya que la elección de vectores no es única, podemos ir añadiendo los que nos parezca bien, siempre y cuando se preserve la independencia lineal.

Ejercicio 2 (4 puntos).– Se considera el espacio vectorial $\mathbb{C}[X]_3$ de polinomios con coeficientes complejos y grado menor o igual que 3. Determinar razonadamente si el conjunto

$$\left\{1+iX,\, -X^2-iX^3,\, X-X^3\right\}$$

es o no linealmente independiente.

Solución: Aplicaremos la definición, a falta de algo mejor. Para ello, consideremos una combinación lineal de estos vectores que nos dé el vector $\underline{0}$, que en este caso es ni más ni menos que el polinomio 0:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\,(1+iX)+\beta\left(-X^2-iX^3\right)+\gamma\left(X-X^3\right) \\ &= \alpha+(\alpha i+\gamma)X-\beta X^2+(-i\beta-\gamma)X^3 \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Del término independiente y el coeficiente de X^2 obtenemos inmediatamente $\alpha=\beta=0$. Entonces los coeficientes de X y X^3 nos dicen que $\gamma=0$. Por tanto, la única forma de escribir 0 como combinación lineal de los tres vectores es la trivial, de donde son linealmente independientes.

Ejercicio 1 (6 puntos).– Se considera el espacio vectorial $V = \mathcal{M}(2;\mathbb{Q})$. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si el conjunto $\mathcal{R}$ es o no una base de V. En caso afirmativo, hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ de una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Solución: Tomamos, para facilitar los cálculos, coordenadas respecto de la base habitual de V:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Y $\mathcal{R}$ (entendiendo, a partir de ahora, que hablamos de sus coordenadas) es:

$$\mathcal{R} = \{\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (0,0,0,2),\ (0,1,-1,0)\ \}$$

Entonces como

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

el conjunto $\mathcal{R}$ es linealmente independiente. Al ser $\dim(V) = 4$, $\mathcal{R}$ es una base.

Para hallar las coordenadas de una matriz genérica hacemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que se resume en el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & & & & & & & = & a \\ & & \alpha_2 & & & + & \alpha_4 & = & b \\ & & \alpha_2 & & & - & \alpha_4 & = & c \\ \alpha_1 & & & + & 2\alpha_3 & & & = & d \end{array} \right.$$

Resolviendo obtenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{d-a}{2}, \frac{b-c}{2} \right).$$

Ejercicio 2 (4 puntos).– Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}[X]_n$ de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, se considera el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (X-\alpha)^i \mid i = 0, \ldots, n \right\}.$$

Determinar razonadamente si el conjunto $\mathcal{S}$ es o no una base de $\mathbb{R}[X]_n$.

Solución: Tomamos coordenadas respecto de la base habitual de $\mathbb{R}[X]_n$, que es $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$. Entonces notemos que

$$\left[(X-\alpha)^i\right]_{\mathcal{B}} = \left((-\alpha)^i, ..., 1, 0, 0, ..., 0\right)$$

donde el 1 ocupa la posición $i+1$-ésima, correspondiente al coeficiente de X^i. Esto quiere decir que si ponemos las coordenadas de los elementos de $\mathcal{S}$ en una matriz obtendremos (ponemos asteriscos en las posiciones donde nos da igual el elemento de la matriz a efectos del razonamiento)

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & ... & (-\alpha)^i & ... & (-\alpha)^n \\ 0 & 1 & ... & * & ... & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = n+1$$

por ser una matriz triangular superior con una diagonal de unos. Por tanto, $\mathcal{S}$ es linealmente independiente y, al ser $\dim(\mathbb{R}[X]_n) = n+1$, es también base.

Ejercicio.– En el espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios vectoriales dados por

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_3 & & & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 = \langle\, (1,1,1,1),\ (1,0,1,1) \rangle.$$

1) Hallar las dimensiones de $L_1 + L_2$ y de $L_1 \cap L_2$, dando bases de ambas (4 puntos).

2) Estudiar si $V = L_1 \oplus L_2$. En caso de que la respuesta sea negativa, hallar un sistema de ecuaciones que defina un subespacio complementario de L_2 (3 puntos).

3) Dar una base ortonormal de L_1, utilizando el procedimiento de Gram–Schmidt (3 puntos).

Solución: Comencemos por dar una base de L_1. Para ello, simplemente resolvemos el sistema (por ejemplo, tomando x_1, x_3 como variables y x_2, x_4 como parámetros). La solución general es

$$x_1 = \frac{-2}{3}\mu,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = \frac{1}{3}\mu,\ x_4 = \mu.$$

De donde una base es, por ejemplo,

$$L_1 = \langle\, (-2,0,1,3),\ (0,1,0,0) \rangle.$$

Una base de L_2 es el sistema generador dado, de forma que un sistema generador de $L_1 + L_2$ viene dado por

$$L_1 + L_2 = \langle\, (-2,0,1,3),\ (0,1,0,0),\ (1,1,1,1),\ (1,0,1,1)\, \rangle.$$

Ahora bien, se tiene que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

donde un menor no nulo de orden 3 es, por ejemplo, el formado por las tres primeras filas y columnas. Por tanto una base de $L_1 + L_2$ es la dada por

$$L_1 + L_2 = \langle\, (-2,0,1,3),\ (0,1,0,0),\ (1,1,1,1)\, \rangle.$$

Así pues $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Para hallar una base de $L_1 \cap L_2$ necesitamos un sistema de ecuaciones de L_2, que viene dado por

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 - x_3 \\[2ex] 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = x_1 - x_4 \end{array} \right.$$

Por tanto

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow L_1 \cap L_2 = \langle\, (0,1,0,0) \rangle.$$

De paso hemos resuelto la primera pregunta del segundo apartado, ya que, por ejemplo, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1 \neq 0$, así que V no es suma directa de L_1 y L_2. Para hallar entonces un subespacio complementario de L_2 extendemos la base de L_2 hasta una de todo V. Por ejemplo

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 4,$$

de donde podemos tomar el subespacio $L_3 = \langle\, (1,0,0,0),\ (0,0,1,0)\, \rangle$, que tiene como ecuaciones

$$L_3 : x_2 = x_4 = 0.$$

Finalizamos entonces hallando una base ortonormal de L_1. Para ello partimos de la base hallada:

$$\mathcal{B}_1 = \{(-2,0,1,3),\ (0,1,0,0)\}.$$

Como ambos vectores son ortogonales (qué casualidad...), simplemente hay que dividirlos por su módulo para obtener la base buscada:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}(-2,0,1,3),\ (0,1,0,0) \right\}.$$

Ejercicio 1.– Consideramos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}, \qquad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B}$ es:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz $M_{\mathcal{C}}(f)$ de f con respecto a la base $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2.– En $\mathbb{R}^4$, consideramos el subespacio vectorial L_1 definido por el siguiente sistema de ecuaciones implícitas de incógnitas x, y, z, t:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Consideramos también el subespacio vectorial L_2:

$$L_2 = \langle (1,0,1,3),\ (0,1,0,1),\ (2,1,2,7)\rangle$$

a. Hallar $\dim L_1$ y $\dim L_2$. Hallar también un sistema de ecuaciones implícitas *independiente* de L_1, y una base de L_2.

b. Calcular una base de $L_1 \cap L_2$. Deducir de esto $\dim(L_1 \cap L_2)$ y $\dim(L_1 + L_2)$.

Ejercicio.– Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, y sea W un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4. Sea $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una base de V y sea $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ una base de W. Consideremos la aplicación lineal $f : V \to W$ definida por los siguientes datos:

$$\begin{array}{rcccccccc} f(\underline{v}_1) & = & \underline{w}_1 & + & \underline{w}_2 & + & \underline{w}_3 & + & \underline{w}_4 \\ f(\underline{v}_2) & = & \underline{w}_1 & + & \underline{w}_2 & + & 2\underline{w}_3 & & \\ f(\underline{v}_3) & = & & & & + & \underline{w}_3 & - & \underline{w}_4 \end{array}$$

Consideremos además las variedades lineales

$$L = \langle (0,-1,1), (1,0,0) \rangle \subset V$$

$$L' = \langle (0,0,0,1), (2,2,2,1) \rangle \subset W.$$

1. Hallar la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.
2. Hallar una base de las variedades $f(L)$, $\mathrm{Im}(f)$ y $\ker(f)$.
3. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de la variedad $f^{-1}(L')$.

Ejercicio 1.– Sea $\mathcal{C}$ la base habitual de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}'$ la base habitual de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el homomorfismo de $\mathbb{R}$–espacios vectoriales cuya matriz, con respecto a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, es:

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que f es sobreyectiva y que $\ker f$ tiene dimensión 1.
b) Calcular una base $\{\underline{u}_1\}$ de $\ker f$.
c) Hallar vectores $\underline{u}_2$ y $\underline{u}_3$ tales que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ que llamaremos $\mathcal{B}$.
d) Comprobar que $\{f(\underline{u}_2), f(\underline{u}_3)\}$ es una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
e) Hallar $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Ejercicio 2.– Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base habitual $\mathcal{C}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Hallar los autovalores de f.
b. Hallar una base de cada subespacio invariante.
c. Hallar una base $\mathcal{B}$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal. Escribir también $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Ejercicio.– Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 5, y sea $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}, \underline{v_5}\}$ una base de V. Consideremos el endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ determinado por los siguientes datos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} f(\underline{v_1}) & = & 4\underline{v_1} & & & - & 6\underline{v_3} & - & 3\underline{v_4} & + & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_2}) & = & -3\underline{v_1} & + & \underline{v_2} & + & 6\underline{v_3} & + & 3\underline{v_4} & - & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_3}) & = & & & & - & 2\underline{v_3} & & & & , \\ f(\underline{v_4}) & = & 6\underline{v_1} & & & - & 6\underline{v_3} & - & 5\underline{v_4} & + & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_5}) & = & & & & & & & & - & 2\underline{v_5}. \end{array}\right.$$

Determinar si f es diagonalizable y, en ese caso, hallar una base $\mathcal{B}'$ de V y una matriz diagonal D tal que $M_{\mathcal{B}'}(f) = D$.

Ejercicio 1.– Se considera L, el subespacio generado por los vectores

$$\{ (1,1,0,i),\ (0,i,0,1),\ (1,0,0,2i),\ (0,0,i,0)\}$$

en $\mathbb{C}^4$. Obtener una base ortonormal de L.

Ejercicio 2.– Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base habitual es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 57 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un numero indeterminado.
a. Hallar el polinomio característico $P(X)$ de f.
b. Supongamos que a es distinto de 0 y 1. Dar la lista de las raíces de $P(X)$ con sus multiplicidades respectivas. Deducir de esto (sin cálculo de subespacios invariantes) que f es diagonalizable. Dar una matriz diagonal de f.
c. Sea ahora $a = 0$. Dar la lista de las raíces de $P(X)$ con sus multiplicidades respectivas. Determinar si f es o no es diagonalizable.
d. Mismas preguntas que en **c.** en el caso $a = 1$.

Ejercicio.– En el espacio vectorial $V = \mathbb{C}_3[X]$ se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : V & \longrightarrow & V \\ P(X) & \longmapsto & (X-i)P(X) - P(0) \end{array}$$

1) Demostrar que f es un homomorfismo de espacios vectoriales.
2) Hallar la matriz de f respecto de la base habitual $\{1, X, X^2, X^3\}$.
3) Hallar $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. Estudiar si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Ejercicio.– Sea $V = \mathbb{R}^3$ y f_3 el endomorfismo cuya matriz respecto de la base habitual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular los autovalores de f_3 y los espacios de autovectores respectivos.
2. Demostrar que f_3 es diagonalizable.
3. Demostrar que el endomorfismo f_n de $V = \mathbb{R}^n$ con matriz respecto de la base habitual

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Ejercicio.– Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ el endomorfismo dado, respecto de la base habitual, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Hallar una base $\mathcal{C}$, ortonormal, de V tal que $M_{\mathcal{C}}(f)$ sea diagonal.
2) Sea $L : x_1 - x_4 = 0$. Hallar $f(L)$ y $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 1.– Consideramos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}\,, \qquad \mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}\,.$$

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B}$ es:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz $M_{\mathcal{C}}(f)$ de f con respecto a la base $\mathcal{C}$.

Solución: La matriz buscada está determinada por la relación:

$$M_{\mathcal{C}}(f) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})\, M_{\mathcal{B}}(f)\, M(\mathcal{C},\mathcal{B}).$$

Se tiene:

$$M(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y $M(\mathcal{B},\mathcal{C})$ es su inversa. Sabemos que la inversa de una matriz regular

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ésta es la matriz buscada.

Ejercicio 2.– En $\mathbb{R}^4$, consideramos el subespacio vectorial L_1 definido por el siguiente sistema de ecuaciones implícitas de incógnitas x, y, z, t:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Consideramos también el subespacio vectorial L_2:

$$L_2 = \langle (1,0,1,3),\ (0,1,0,1),\ (2,1,2,7) \rangle$$

a. Hallar $\dim L_1$ y $\dim L_2$. Hallar también un sistema de ecuaciones implícitas *independiente* de L_1, y una base de L_2.

b. Calcular una base de $L_1 \cap L_2$. Deducir de esto $\dim(L_1 \cap L_2)$ y $\dim(L_1 + L_2)$.

Solución: Para el primer apartado, consideramos A la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones implícitas que define L_1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que:

$$\dim L_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg} A = 4 - \mathrm{rg} A.$$

Por lo tanto determinamos $\dim L_1$ buscando $\mathrm{rg}A$. Buscamos un menor máximo no nulo de A; lo hacemos por el método del orlado. El menor de orden 2 de las fila 1, 2 y de las columnas 1, 2 es no nulo, y los menores de orden 3 que lo orlan son ambos nulos. Por lo tanto A tiene rango 2, y $\dim L_1 = 2$. Además esto nos indica que la tercera ecuación (que no participa en el menor no nulo de orden máximo encontrado) es combinación lineal de las dos primeras, y tenemos como sistema de ecuaciones implícitas independientes para A:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ahora consideramos L_2. Buscamos una base de L_2, su cardinal sera la dimensión de L_2. Buscamos esta base como subconjunto del sistema de generadores dado. Sea B la matriz de los generadores dados de L_2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Buscamos un menor no nulo máximo de B. Las columnas que participen en este menor corresponderán a una base de L_2. El menor de orden 2 de las dos primeras filas y dos primeras columnas de B es no nulo y los dos menores de orden 3 que lo orlan valen cero. Por lo tanto $\mathrm{rg}B = 2$, $\dim L_2 = 2$ y tenemos que $\{(1,0,1,3),(0,1,0,1)\}$ es una base de L_2.

Para el segundo apartado, sea $\underline{v} \in L_2$. Se descompone en la base $\{(1,0,1,3),(0,1,0,1)\}$ de L_2:

$$\underline{v} = \alpha_1(1,0,1,3) + \alpha_2(0,1,0,1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, 3\,\alpha_1 + \alpha_2),$$

y pertenece a L_1 si y sólo si es solución de:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

es decir si y sólo si:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & - & \alpha_2 & - & 2\alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Este sistema de incógnitas α_1, α_2 es equivalente a:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Por lo tanto, los elementos de $L_1 \cap L_2$ son exactamente los de la forma:

$$(\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_1, 2\,\alpha_1)$$

para $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, de donde

$$L_1 \cap L_2 = \langle (1,-1,1,2) \rangle.$$

Una base de $L_1 \cap L_2$ es $\{(1,-1,1,2)\}$ y $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Por el teorema de la dimensión:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ejercicio.– Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, y sea W un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4. Sea $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una base de V y sea $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ una base de W. Consideremos la aplicación lineal $f : V \to W$ definida por los siguientes datos:

$$\begin{array}{rcccccccc} f(\underline{v}_1) & = & \underline{w}_1 & + & \underline{w}_2 & + & \underline{w}_3 & + & \underline{w}_4 \\ f(\underline{v}_2) & = & \underline{w}_1 & + & \underline{w}_2 & + & 2\underline{w}_3 & & \\ f(\underline{v}_3) & = & & & & + & \underline{w}_3 & - & \underline{w}_4 \end{array}$$

Consideremos además las variedades lineales

$$L = \langle (0, -1, 1), (1, 0, 0) \rangle \subset V$$

$$L' = \langle (0, 0, 0, 1), (2, 2, 2, 1) \rangle \subset W.$$

1. Hallar la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.
2. Hallar una base de las variedades $f(L)$, $\mathrm{Im}(f)$ y $\ker(f)$.
3. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas independientes de la variedad $f^{-1}(L')$.

Solución: Comencemos por dar la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ que, por lo estudiado en teoría es, precisamente,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$ está generada por las columnas de A, por lo que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 2, 0),\ (0, 0, 1, -1) \rangle.$$

Ahora bien,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

porque $C_3 = C_2 - C_1$. Por tanto, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 2, 0) \rangle.$$

Para hallar el núcleo de f, $\ker(f)$, tenemos que resolver el sistema

$$AX^t = 0_{4\times 1},$$

esto es,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como ya hemos hallado antes el rango de A, sabemos que podemos quedarnos, por ejemplo, con las ecuaciones segunda y cuarta, dejando a x_3 como parámetro. Entonces

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & & & = & x_3 \end{array}\right. \Longrightarrow x_1 = \alpha,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = \alpha;$$

de donde

$$\ker(f) = \langle (1,-1,1) \rangle.$$

Para dar ahora $f(L)$ necesitamos un sistema generador, cosa que ya tenemos, y hemos de calcular sus imágenes. Nada más fácil:

$$f(0,-1,1)^t = A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(0,-1,1) = (-1,-1,-1,-1).$$

$$f(1,0,0)^t = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(1,0,0) = (1,1,1,1).$$

De aquí, por lo estudiado en teoría,

$$f(L) = \langle (-1,-1,-1,-1),\ (1,1,1,1) \rangle = \langle (1,1,1,1) \rangle.$$

Para calcular $f^{-1}(L')$ necesitamos un sistema de ecuaciones que defina L'. Por ejemplo,

$$2 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} \Longrightarrow x_2 - x_3 = 0 \\ \\ 0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} \Longrightarrow x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones de L' son entonces, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0_{2\times 1},$$

por lo que, siguiendo la teoría, unas ecuaciones de $f^{-1}(L')$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0_{2\times 1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x_2 + x_3 = 0.$$

Ejercicio 1.– Sea $\mathcal{C}$ la base habitual de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}'$ la base habitual de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el homomorfismo de $\mathbb{R}$–espacios vectoriales cuya matriz, con respecto a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, es:

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Demostrar que f es sobreyectiva y que $\ker f$ tiene dimensión 1.
b. Calcular una base $\{\underline{u}_1\}$ de $\ker f$.
c. Hallar vectores $\underline{u}_2$ y $\underline{u}_3$ tales que $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ que llamaremos $\mathcal{B}$.
d. Comprobar que $\{f(\underline{u}_2), f(\underline{u}_3)\}$ es una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.
e. Hallar $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Solución: Vayamos por partes:

a. El menor 2×2 de las dos primeras columnas de la matriz es no nulo. Por lo tanto, la matriz tiene rango 2. Utilizamos la propiedad vista en clase: f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{rg} M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \dim \mathbb{R}^2$ (ya que $\mathbb{R}^2$ es el espacio de llegada), por lo tanto f es sobreyectiva. Utilizamos ahora la formula:

$$\dim \ker f = \dim RR^3 - \mathrm{rg} M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$$

(ya que $\mathbb{R}^3$ es el espacio de salida), por lo tanto $\dim \ker f = 1$.

b. Resolvemos

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para esto, por ejemplo, escalonamos la matriz $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, haciendo $F_2 \leftarrow 2F_2 - F_1$, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y luego hacemos $F_1 \leftarrow F_1 - F_2$, viene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que el conjunto de las soluciones es:

$$\{(z, -3\,z, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

Por lo tanto, $\ker f$ esta generado por $(1, -3, 1)$. Este vector forma una base de $\ker f$.

c. Elegimos $\underline{u}_2 = (0, 1, 0)$ y $\underline{u}_3 = (0, 0, 1)$ (hay muchas otras elecciones posibles). Se tiene que

$$M(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene determinante 1, por lo tanto es regular, y de esto $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

d. Se lee en la matriz de f que $f(\underline{u}_2) = (1, 1)$ y $f(\underline{u}_3) = (1, 2)$. Estos dos vectores no son proporcionales, por lo tanto forman un conjunto linealmente independiente de elementos de $\mathrm{Im} f$. Como $\dim \mathrm{Im} f = 2$, forman una base de $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

e. Es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.– Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base habitual $\mathcal{C}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Hallar los autovalores de f.
b. Hallar una base de cada subespacio invariante.
c. Hallar una base $\mathcal{B}$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal. Escribir también $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Solución: El polinomio característico de f es:

$$\begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 0 \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1).$$

Los autovalores son las raíces del polinomio característico, esto es, 1 y 2. El subespacio invariante asociado a 1 es el conjunto de las soluciones de:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene un subespacio de base $\{(1,1,1)\}$. Por su parte, el subespacio invariante asociado a 2 es el conjunto de las soluciones de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es el subespacio definido por $x = 0$, admite como base $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Si consideramos la reunión de las bases anteriores:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Es linealmente independiente por ser reunión de bases de subespacios invariantes. Además su cardinal es la dimensión del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$, por lo tanto es una base de $\mathbb{R}^3$. Se tiene:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio.– Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 5, y sea $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}, \underline{v_5}\}$ una base de V. Consideremos el endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ determinado por los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} f(\underline{v_1}) & = & 4\underline{v_1} & & & - & 6\underline{v_3} & - & 3\underline{v_4} & + & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_2}) & = & -3\underline{v_1} & + & \underline{v_2} & + & 6\underline{v_3} & + & 3\underline{v_4} & - & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_3}) & = & & & & - & 2\underline{v_3} & & & & , \\ f(\underline{v_4}) & = & 6\underline{v_1} & & & - & 6\underline{v_3} & - & 5\underline{v_4} & + & 6\underline{v_5}, \\ f(\underline{v_5}) & = & & & & & & & & - & 2\underline{v_5}. \end{array} \right.$$

Determinar si f es diagonalizable y, en ese caso, hallar una base $\mathcal{B}'$ de V y una matriz diagonal D tal que $M_{\mathcal{B}'}(f) = D$.

Solución: Sabemos que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -2 & -6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Primero tenemos que calcular los autovalores de f. Para ello calculamos el polinomio característico $|\lambda I_5 - M_{\mathcal{B}}(f)|$ y hallamos sus raíces:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & \lambda + 2 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & \lambda + 5 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 \\ 3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^3(\lambda-1)^2,$$

luego tenemos dos autovalores:

$$\lambda = -2, \quad \text{mult}(-2) = 3; \qquad \lambda = 1, \quad \text{mult}(1) = 2.$$

Pasamos a calcular los subespacios invariantes. Comenzamos con $V_1 = \ker(I_5 - f)$, definido por un sistema de ecuaciones:

$$(I_5 - M_{\mathcal{B}}(f))\, X^t = 0_{5\times 1}.$$

La matriz queda

$$C = I_5 - M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rg}(C) = 3,$$

dado, por ejemplo, por las tres últimas filas y columnas. Resolviendo el sistema por Rouché–Fröbenius, obtenemos la solución general

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = -\alpha + \beta,\ x_4 = \frac{-\alpha + \beta}{2},\ x_5 = \alpha - \beta.$$

Dando valores, obtenemos,

$$V_1 = \langle\, (2, 0, -2, -1, 2),\ (0, 2, 2, 1, -2)\, \rangle.$$

Vamos ahora con $V_{-2} = \ker((-2) \cdot I_5 - f)$, definido por un sistema de ecuaciones:

$$((-2) \cdot I_5 - M_{\mathcal{B}}(f))\, X^t = 0_{5\times 1}.$$

La matriz queda

$$C = I_5 - M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rg}(C) = 2,$$

dado por las dos primeras filas y las columnas 2 y 4. Resolviendo el sistema,

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = 0,\ x_3 = \beta,\ x_4 = -\alpha,\ x_5 = \gamma.$$

Así pues,

$$V_{-2} = \langle\, (1, 0, 0, -1, 0),\ (0, 0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1)\, \rangle.$$

La unión de ambas bases es base de V, como se puede comprobar fácilmente. Conforme a los resultados de la teoría, entonces, si

$$\mathcal{B}' = \{(2, 0, -2, -1, 2),\ (0, 2, 2, 1, -2),\ (1, 0, 0, -1, 0),\ (0, 0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1)\},$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.– Se considera L, el subespacio generado por los vectores

$$\{\,(1,1,0,i),\ (0,i,0,1),\ (1,0,0,2i),\ (0,0,i,0)\}$$

en $\mathbb{C}^4$. Obtener una base ortonormal de L.

Solución: Utilizaremos el algoritmo de Gram–Schmidt. Para ello comencemos por ver si los vectores son base de L. Dado que

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 1 & 2i & 0 \end{pmatrix} = 3$$

nos quedaremos con, por ejemplo, los tres últimos vectores (que son más sencillos). Aplicamos entonces Gram–Schmidt haciendo:

$$\underline{v}_1 = (0,i,0,1)$$

y también

$$\underline{v}_2 = (1,0,0,2i) + \alpha\underline{v}_1 = (1,\alpha\, i, 0, \alpha + 2i),$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$ (cuidado: α es un número complejo, en principio).

Imponemos ahora que $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$, para lo cual, dado que el vector que conocemos por completo es $\underline{v}_1$ haremos

$$0 = \overline{\underline{v}_1}\ \underline{v}_2^t = 0 \cdot 1 + (-i) \cdot \alpha\, i + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (\alpha + 2i) = 2\alpha + 2i,$$

por lo que, en este caso, $\alpha = -i$, o sea, $\underline{v}_2 = (1,1,0,i)$. Hacemos entonces

$$\underline{v}_3 = (0,0,i,0) + \beta\underline{v}_1 + \gamma\underline{v}_2 = (\gamma, \beta\, i + \gamma, i, \beta + \gamma\, i)$$

e imponemos que sea ortogonal a los dos anteriores, de la misma forma a como hemos hecho antes.

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 0 &\implies 2\beta = 0 \\ \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = 0 &\implies 3\gamma = 0 \end{aligned}$$

De donde deducimos que $\underline{v}_3 = (0,0,i,0)$ (era elemental ver que ése vector ya era ortogonal a los otros dos, pero lo hemos hecho por seguir el algoritmo ciegamente). Sólo resta normalizar para obtener la base buscada

$$\left\{\frac{\underline{v}_1}{||\underline{v}_1||},\ \frac{\underline{v}_2}{||\underline{v}_2||},\ \frac{\underline{v}_3}{||\underline{v}_3||}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,i,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,i),\ (0,0,i,0)\right\}.$$

Ejercicio 2.– Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base habitual es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 57 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un numero indeterminado.

a. Hallar el polinomio característico $P(X)$ de f.
b. Supongamos que a es distinto de 0 y 1. Dar la lista de las raíces de $P(X)$ con sus multiplicidades respectivas. Deducir de esto (sin cálculo de subespacios invariantes) que f es diagonalizable. Dar una matriz diagonal de f.
c. Sea ahora $a = 0$. Dar la lista de las raíces de $P(X)$ con sus multiplicidades respectivas. Determinar si f es o no es diagonalizable.
d. Mismas preguntas que en **c.** en el caso $a = 1$.

Solución: El polinomio característico es:

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & -57 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-a \end{vmatrix} = X(X-1)(X-a)$$

Para a distinto de 0 y 1, las raíces de $P(X)$ son 0, 1 y a. Son raíces simples. Utilizamos que un endomorfismo de un k–espacio vectorial de dimensión m que tiene m autovalores distintos en k es diagonalizable, ya que. estamos en este caso con $m = 3$ y $k = \mathbb{R}$. Por lo tanto f es diagonalizable. Una matriz diagonal de f es:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $a = 0$, el polinomio $P(X)$ tiene como raíces 0 (raiz doble) y 1 (raiz simple). Estamos en el caso cuando la suma de las multiplicidades de los autovalores del endomorfismo es igual a la dimensión del espacio vectorial. En tal caso, el endomorfismo es diagonalizable si y solo si cada subespacio invariante tiene como dimensión la multiplicidad del autovalor correspondiente. En el caso considerado, obtenemos que f es diagonalizable si y solo si $\dim V_1 = 1$ y $\dim V_0 = 2$. La primera condición se cumple automáticamente, por lo que f es diagonalizable si y solo si $\dim V_0 = 2$. El subespacio V_0 es el núcleo de f, por lo tanto su dimensión es $3 - k$, donde k es el rango de:

$$\begin{pmatrix} 0 & -57 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 2 (porque su determinante vale 0, pero el menor de filas 1, 2 y columnas 2, 3 es no nulo), por lo tanto $\dim V_0 = 1$, de donde sigue que f no es diagonalizable.

En el caso $a = 1$ $P(X)$ tiene como raíces 0 (raiz simple) y 1 (raiz doble). Aplicando el mismo teorema que en **c.**, obtenemos que f es diagonalizable si y solo si $\dim V_1 = 2$. El subespacio V_1 es el núcleo de $\mathrm{id} - f$, que tiene como matriz en la base habitual:

$$\begin{pmatrix} 1 & -57 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

que tiene obviamente rango 1. Por lo tanto, $\dim V_1 = 2$, y f es diagonalizable.

Ejercicio.– Entre los espacios vectoriales $V_2 = \mathbb{C}_2[X]$ y $V_3 = \mathbb{C}_3[X]$ se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : V_2 & \longrightarrow & V_3 \\ P(X) & \longmapsto & (X-i)P(X) - P(0) \end{array}$$

1) Demostrar que f es un homomorfismo de espacios vectoriales.
2) Hallar la matriz de f respecto de las bases habituales $\{1, X, X^2\}$ y $\{1, X, X^2, X^3\}$.
3) Hallar $\ker(f)$ e Im(f). Estudiar si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución: Para ver que f es un homomorfismo de espacos vectoriales consideramos dos vectores $P(X), Q(X) \in V$ y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha P(x) + \beta Q(x)) &= (X-i)(\alpha P(x) + \beta Q(x)) - (\alpha P(x) + \beta Q(x))(0) \\ &= \alpha(X-i)P(x) + \beta(X-i)Q(x) - (\alpha P(0) + \beta Q(0)) \\ &= \alpha(X-i)P(x) - \alpha P(0) + \beta(X-i)Q(x) - \beta Q(0)) \\ &= \alpha f(P(x)) + \beta f(Q(X)), \end{aligned}$$

de donde f es un endomorfismo de V.

Para hallar la matriz de f respecto de las bases habituales, que notaremos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ (por ejemplo), hallamos las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{rcl} f(1) = (X-i)\cdot 1 - 1 = X - (i+1) & \Longrightarrow & f(1)_{\mathcal{C}} = (-i-1, 1, 0, 0) \\ f(X) = (X-i)\cdot X - 0 = X^2 - iX & \Longrightarrow & f(X)_{\mathcal{C}} = (0, -i, 1, 0) \\ f(X^2) = (X-i)\cdot X^2 - 0 = X^3 - iX^2 & \Longrightarrow & f(X^2)_{\mathcal{C}} = (0, 0, -i, 1) \end{array}$$

de donde tenemos que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -i-1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de f tiene por ecuaciones

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0_{3\times 1}.$$

Como se tiene que

$$\text{rg}\,(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)) = 3,$$

es entonces obvio que $\ker(f) = \{0\}$, de donde f es inyectiva.

Como sabemos por teoría

$$\text{Im}(f) = \langle\, (-i-1, 1, 0, 0),\ (0, -i, 1, 0),\ (0, 0, -i, 1)\,\rangle\,.$$

Obviamente

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}\,(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)) = 3,$$

de donde f no puede ser sobreyectiva, ya que $\dim(V_3) = 4$.

Ejercicio.– Sea $V = \mathbb{R}^3$ y f_3 el endomorfismo cuya matriz respecto de la base habitual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular los autovalores de f_3 y los espacios de autovectores respectivos.
2. Demostrar que f_3 es diagonalizable.
3. Demostrar que el endomorfismo f_n de $V = \mathbb{R}^n$ con matriz respecto de la base habitual

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Solución: Vayamos por partes.

1. Es sencillo ver que el polinomio característico $|A - \lambda I| = (\lambda)^2(\lambda - 3)$ y que, por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidad 1.

   Una base del espacio $V_0 = \ker(f_3 - 0 \cdot \mathrm{Id}_V) = \ker(f)$ de autovectores asociados a λ_1 es, por ejemplo, $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

   Una base de $V_3 = \ker(f_3 - 3 \cdot \mathrm{Id}_V)$, los autovectores asociados a λ_2, es $\{(1, 1, 1)\}$.

2. Como coinciden, para todos los autovalores, la multiplicidad y la dimensión del subespacio asociado, el endomorfismo f_3 es diagonalizable.

3. Para estudiar la matriz en dimensión n puede resultar más sencillo que hacer los cálculos anteriores darse cuenta de que los autovalores son 0 y n porque:

   - 0 es autovalor: $V_0 = \ker(f - 0 \cdot \mathrm{Id}_V)$ es en realidad el núcleo de f y tiene dimensión $n - 1$.
   - n es autovalor porque $f_n(1, \ldots, 1) = n(1, \ldots, 1)$. La dimensión de $V_n = \ker(f_n - n \cdot \mathrm{Id}_V)$ es por tanto mayor o igual que 1, pero no puede ser mayor que uno porque la suma de las multiplicidades sería mayor que n, contando con la del cero que es $n - 1$.

Ejercicio.– Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$ el endomorfismo dado, respecto de la base habitual, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Hallar una base $\mathcal{C}$, ortonormal, de V tal que $M_{\mathcal{C}}(f)$ sea diagonal.
2) Sea $L : x_1 - x_4 = 0$. Hallar $f(L)$ y $f^{-1}(L)$.

Solución: Para empezar calculamos el polinomio característico:

$$|\lambda I_4 - A| = (\lambda - 4)^3(\lambda - 2),$$

por lo que tenemos dos autovalores, $\lambda = 4$ (multiplicidad 3) y $\lambda = 2$ (multiplicidad 1).

El espacio de autovectores V_4 se calcula haciendo

$$V_4 : (4I_4 - A)X^t = 0_{4\times 1} \implies V_4 : x_2 + x_4 = 0,$$

de donde

$$V_4 = \langle\, (1,0,0,0),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,0)\,\rangle.$$

Por su parte

$$V_2 : (2I_4 - A)X^t = 0_{4\times 1} \implies V_2 : x : 1 = x_3 = x_2 - x_4 = 0,$$

de donde

$$V_2 = \langle\, (0,1,0,1)\,\rangle.$$

Entonces una base que diagonaliza a A es, precisamente,

$$\mathcal{B} = \{\, (1,0,0,0),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,0)\ (0,1,0,1)\,\},$$

siendo

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

La misma matriz se obtiene si aplicamos Gram–Schmidt a las dos bases obtenidas para V_4 y V_2. En concreto, como ya son ortogonales, basta con normalizar los vectores. La base buscada es

$$\mathcal{C} = \left\{ (1,0,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1),\ (0,0,1,0)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1) \right\}.$$

Para hallar $f(L)$ notemos que

$$L = \langle\, (1,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0)\,\rangle,$$

de donde

$$f(L) = \langle\, f(1,0,0,1),\ f(0,1,0,0),\ f(0,0,1,0)\,\rangle = \langle\, (4,-1,0,3),\ (0,3,0,-1),\ (0,0,4,0)\,\rangle.$$

Por otra parte, como

$$L : (\,1\ 0\ 0\ \ {-1}\,)\, X^t = 0,$$

entonces

$$f^{-1}(L) : (\,1\ 0\ 0\ \ {-1}\,)\, AX^t = 0,$$

esto es,

$$f^{-1}(L) : 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 0.$$

Ejercicio 1.– En $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ consideramos las variedades lineales afines

$$Y_1 = (1,1,1) + \langle\overrightarrow{(1,-1,0)}\rangle, \qquad Y_2 = (0,3,2) + \langle\overrightarrow{(1,0,1)}\rangle.$$

Se pide:

1. Hallar $Y_1 \cap Y_2$. Si no es vacía, determinarla por un punto y su dirección.
2. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas de $Y_1 + Y_2$.

Ejercicio 2.– Consideremos las variedades afines dadas por

$$r : (-1,0,1) + \left\langle\overrightarrow{(0,0,1)}\right\rangle, \qquad \pi : \, x_2 = 1.$$

1. Probar que $r \cap \pi = \emptyset$.
2. Calcular su posición relativa, es decir, $\dim(r)$, $\dim(\pi)$, $\dim(r+\pi)$ y $\dim(r \cap \pi)$, enunciando la fórmula de la dimensión adecuada.
3. Hallar unas ecuaciones implícitas de $r + \pi$.

Ejercicio.– En el espacio afín $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ se consideran los dos planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv (0,0,0,0,1) + \langle \overrightarrow{(1,1,0,0,0)}, \overrightarrow{(1,-1,0,0,0)} \rangle$$

$$\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & = & -1 \\ & & x_2 & & & & & = & -1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array} \right.$$

Calcular una perpendicular común a π_1 y π_2 así como la distancia entre ambos planos.

Ejercicio 1 (7 puntos).– Se considera el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ y, en él, los planos

$$Y_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ & & x_2 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad Y_2 : (0,1,0,-1) + \langle \overrightarrow{(1,-1,0,-1)}, \overrightarrow{(1,0,1,0)} \rangle.$$

1. Hallar un sistema de ecuaciones de Y_2.
2. Calcular $Y_1 \cap Y_2$.
3. Hallar $[D(Y_1) + D(Y_2)]^{\perp}$.
4. Calcular una perpendicular común a Y_1 e Y_2.
5. Hallar $d(Y_1, Y_2)$.

Ejercicio 2 (3 puntos).– Se considera el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ y el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}$, respecto del cual tomaremos coordenadas y ecuaciones. Sea Y la recta

$$Y : x_1 + x_2 = 2.$$

1. Hallar un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}' = \{O'; \underline{u}, \underline{v}\}$ tal que $O' \in Y$, $\underline{u} \in D(Y)$, $\underline{v} \in D(Y)^{\perp}$.
2. Hallar la matriz, respecto de $\mathcal{R}$, de la simetría de eje Y.

Ejercicio.– En el plano afín ordinario se considera la afinidad f de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Hallar los puntos invariantes de f.
2. Hallar las direcciones invariantes de f.
3. Hallar las rectas invariantes de f.
4. ¿Qué relación hay entre el/los punto(s) invariante(s) hallado(s) y la(s) recta(s) invariante(s) hallada(s)? No hay que hacer cálculos; se puede responder con un sencillo razonamiento.

Ejercicio.– Consideremos el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, y un sistema de referencia afín fijado $\mathcal{R}_a = \{O; \underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Respecto de este sistema de referencia, tenemos afinidad dada por

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los puntos invariantes de f.
2. Calcular las direcciones invariantes de f.
3. Calcular las rectas invariantes de f, usando las direcciones invariantes.

Ejercicio 1.– En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, fijemos un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$. Sea la simetría σ de eje la recta $r = x + 2y - 1 = 0$.

1. Dar un sistema de referencia afín $\mathcal{R}' = \{O', \underline{u}', \underline{v}'\}$, tal que $O' \in r$, $\underline{u}' \in D(r)$, $\underline{v}' \in D(r)^{\perp}$.
2. Dar las ecuaciones de σ respecto de $\mathcal{R}'$.
3. Dar las ecuaciones de σ respecto de $\mathcal{R}$.

Ejercicio 2.– Sean, en $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$, las variedades lineales

$$L_1 : (1,1,1,1,0) + \langle \overrightarrow{(1,-1,0,0,0)}, \overrightarrow{(0,0,1,2,0)} \rangle, \qquad L_2 : \begin{cases} x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_3 - x_4 & = 1. \end{cases}$$

1. Determinar su posición relativa y cuántas perpendiculares comunes existen.
2. Calcular $d(L_1, L_2)$.

Ejercicio 1 (8 puntos).– Se da en el plano el movimiento f de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13/5 & -3/5 & -4/5 \\ -6/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar un vector no nulo que determine cada una de sus direcciones invariantes.
2. Hallar las rectas invariantes por f.
3. Hallar la matriz de la simetría s de eje la recta $2x + y - 2 = 0$ y la del producto $s \circ f$.
4. ¿Qué tipo de movimiento es $s \circ f$?

Ejercicio 2 (2 puntos).– Hallar el hiperplano mediador de los puntos $P = (1, 2, 3, 4)$ y $Q = (5, 4, 3, 2)$ en el espacio euclídeo de dimensión 4.

Ejercicio 1.– En $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ consideramos las variedades lineales afines

$$Y_1 = (1,1,1) + \langle\overrightarrow{(1,-1,0)}\rangle, \qquad Y_2 = (0,3,2) + \langle\overrightarrow{(1,0,1)}\rangle.$$

Se pide:

1. Hallar $Y_1 \cap Y_2$. Si no es vacía, determinarla por un punto y su dirección.
2. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas de $Y_1 + Y_2$.

Solución: Hay muchas formas de calcular la intersección de dos variedades lineales: por ejemplo uniendo sistemas de ecuaciones implícitas. Lo haremos aquí de otra forma. Las ecuaciones paramétricas de ambas variedades son (cuidado al escoger los parámetros...):

$$Y_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & 1 & + & \lambda \\ y & = & 1 & - & \lambda \\ z & = & 1 & & \end{array} \right. \qquad Y_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & & & \mu \\ y & = & 3 & & \\ z & = & 2 & + & \mu \end{array} \right.$$

Igualando ecuaciones paramétricas tenemos el sistema

$$1 + \lambda = \mu\,, \qquad 1 - \lambda = 3\,, \qquad 1 = 2 + \mu$$

que tiene como solución única $\lambda = -2$, $\mu = -1$. Llevando este valor de λ a las paramétricas de Y_1 tenemos que $Y_1 \cap Y_2$ es el punto $(-1,3,1)$ (luego la dirección es $\langle\overrightarrow{(0,0,0)}\rangle$).

Como Y_1 y Y_2 se cortan en un punto,

$$\dim(Y_1 + Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2) = 1 + 1 - 0 = 2,$$

esto es, $Y_1 + Y_2$ ha de ser un plano, que contendrá al punto de intersección y a un punto arbitrario de cada recta (distintos de él), o bien al punto de intersección y a las direcciones de las dos rectas. Así, $Y_1 + Y_2$ tendrá una única ecuación implícita, que se puede calcular, por ejemplo, hallado primero su variedad de dirección, que es

$$D(Y_1 + Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) = \langle\overrightarrow{(1,-1,0)},\ \overrightarrow{(1,0,1)}\rangle : x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

de donde $Y_1 + Y_2 : x_1 + x_2 - x_3 = \alpha$, para un cierto α. Imponiendo, por ejemplo, que $(1,1,1)$ ha de estar en $Y_1 + Y_2$, tenemos que $Y_1 + Y_2 : x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Ejercicio 2.– Consideremos las variedades afines dadas por

$$r : (-1,0,1) + \langle\overrightarrow{(0,0,1)}\rangle, \qquad \pi :\ x_2 = 1.$$

1. Probar que $r \cap \pi = \emptyset$.
2. Calcular su posición relativa, es decir, $\dim(r)$, $\dim(\pi)$, $\dim(r+\pi)$ y $\dim(r \cap \pi)$, enunciando la fórmula de la dimensión adecuada.
3. Hallar unas ecuaciones implícitas de $r + \pi$.

Solución.– 1. Las ecuaciones paramétricas de r son

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = -1 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 1 + \lambda. \end{array} \right.$$

Todos los puntos de r tienen la coordenada $x_2 = 0$, por lo que ninguno puede estar en el plano $x_2 = 1$.

2. Dado que $r \cap \pi = \emptyset$, se tiene $\dim(r \cap \pi) = -1$. Por otro lado, usando la fórmula de la dimensión para variedades afines con intersección vacía,

$$\dim(r + \pi) + \dim(r \cap \pi) + \dim(D(r) \cap D(\pi)) = \dim(r) + \dim(\pi).$$

Como $\overrightarrow{(0,0,1)} \in D(\pi)$, $\dim(D(r) \cap D(\pi)) = 1$. Por tanto, $\dim(r + \pi) = 3$. Por otro lado, como $\dim(D(r) \cap D(\pi)) = 1$, sabemos que $D(r) \subset D(\pi)$, luego r y π son paralelas.

3. Dado que $\dim(r + \pi) = 3$, se tiene $r + \pi = \mathbb{R}^3$, luego unas ecuaciones implícitas son $0 = 0$.

Ejercicio.– En el espacio afín $\mathbf{A}^5(\mathbb{R})$ se consideran los dos planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv (0,0,0,0,1) + \langle \overrightarrow{(1,1,0,0,0)}, \overrightarrow{(1,-1,0,0,0)} \rangle$$
$$\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & -1 \\ & x_2 & & & & = & -1 \\ & & x_3 & + & x_4 + x_5 & = & -1 \end{array} \right.$$

Calcular una perpendicular común a π_1 y π_2 así como la distancia entre ambos planos.

Solución: Calcularemos una perpendicular común Y como en la demostración del teorema que prueba su existencia.

La dirección de Y es la ortogonal a $D(\pi_1) + D(\pi_2)$ (coincide como sabemos con la intersección de las direcciones ortogonales a cada plano). Nos dan una base de $D(\pi_1)$ luego nos falta una base de $D(pi_2)$. Resolviendo el sistema

$$x_1 = x_2 = x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

obtenemos que una base de $D(\pi_2)$ es, por ejemplo,

$$\{\overrightarrow{(0,0,-1,1,0)}, \overrightarrow{(0,0,-1,0,1)}\}.$$

De donde una base de $D(\pi_1) + D(\pi_2)$ es

$$\{\overrightarrow{(1,1,0,0,0)}, \overrightarrow{(1,-1,0,0,0)}, \overrightarrow{(0,0,-1,1,0)}, \overrightarrow{(0,0,-1,0,1)}\}$$

y unas ecuaciones implícitas de su ortogonal

$$x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 = -x_3 + x_5 = 0.$$

La solución de dichas ecuaciones, y por tanto la dirección que andamos buscando es $\langle \overrightarrow{(0,0,1,1,1)} \rangle$.

Para encontrar un punto Q de Y tomamos un punto cualquiera de cada plano

$$Q_1 = (0,0,0,0,1) \in \pi_1, \qquad Q_2 = (-1,-1,-1,0,0) \in \pi_2$$

y descomponemos el vector $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ como

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{Q_1Q_2} & = & (\underline{u}_1 + \underline{u}_2) + \underline{v} \\ \overrightarrow{(-1,-1,-1,0,-1)} & = & \Big(\alpha_1\overrightarrow{(1,1,0,0,0)} + \alpha_2\overrightarrow{(1,-1,0,0,0)}\Big) + \Big(\beta_1\overrightarrow{(0,0,-1,1,0)} + \beta_2\overrightarrow{(0,0,-1,0,1)}\Big) \\ & & +\gamma\overrightarrow{(0,0,1,1,1)}, \end{array}$$

esto es, con $\underline{u}_i \in D(\pi_i)$ y $v \in D(Y)$. Un posible punto Q, uno de los pies de la perpendicular común), será $Q = Q_1 + \underline{u}_1$ (el otro será $R = Q_2 - \underline{u}_2$). Del sistema anterior se deduce que $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 2/3, \beta_2 = -1/3, \gamma = -2/3$.

La perpendicular común –única en este caso porque se ambos planos cruzan– es

$$Y = (-1,-1,0,0,1) + \langle \overrightarrow{(0,0,1,1,1)} \rangle$$

y la distancia entre los planos se calcula como la distancia entre $Q = (-1,-1,0,0,1)$ y $R = (-1,-1,-2/3,-2/3,1/3)$ que es $\sqrt{4/3} = 2\sqrt{3}/3$, el módulo de

$$\underline{v} = \overrightarrow{\left(0,0,\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)}.$$

Ejercicio 1 (7 puntos).– Se considera el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ y, en él, los planos

$$Y_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ & & x_2 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \qquad Y_2 : (0,1,0,-1) + \langle\, \overrightarrow{(1,-1,0,-1)},\ \overrightarrow{(1,0,1,0)}\,\rangle.$$

1. Hallar un sistema de ecuaciones de Y_2.
2. Calcular $Y_1 \cap Y_2$.
3. Hallar $[D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp$.
4. Calcular una perpendicular común a Y_1 e Y_2.
5. Hallar $d(Y_1, Y_2)$.

Solución: Podemos hallar las ecuaciones de Y_2 pasando por el proyectivo, pero lo haremos ene sta ocasión de otra forma. Unas ecuaciones de $D(Y_2)$ son

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \implies D(Y_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

que sólo difieren de las de Y_2 en el términos independiente. Dado que $(0,1,0,-1) \in Y_2$, las ecuaciones son

$$Y_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

Con este sistema es obvio que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, ya que los puntos de la primera verifican $x_2 - x_4 = 0$ y los de la segunda $x_2 - x_4 = 2$.

Para hallar $[D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp$ podemos calcular una base de $D(Y_1)$, unirle la de $D(Y_2)$ y hallar el ortogonal. En concreto:

$$D(Y_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ & & x_2 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \implies D(Y_1) = \langle\, \overrightarrow{((1,-1,0,-1)},\ \overrightarrow{(0,0,1,0)}\,\rangle,$$

de donde

$$D(Y_1) + D(Y_2) = \langle\, \overrightarrow{(1,-1,0,-1)},\ \overrightarrow{(0,0,1,0)},\ \overrightarrow{(1,0,1,0)}\,\rangle \implies$$

$$\implies [D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

y resolviendo fácilmente, $[D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp = \langle\, \overrightarrow{(0,1,0,-1)}\,\rangle$.

Para hallar la perpendicular común podemos seguir el procedimiento del teorema: tomamos puntos cualesquiera $P_1 \in Y_1$ y $P_2 \in Y_2$:

$$P_1 = (-2,0,0,0),\ \ P_2 = (0,1,0,-1) \implies \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{(2,1,0,-1)},$$

y descomponemos este vector en suma un vector de $D(Y_1)$, otro de $D(Y_2)$ y otro de $[D(Y_1) + D(Y_2)]^\perp$:

$$\overrightarrow{(2,1,0,-1)} = \left(\alpha\overrightarrow{(1,-1,0,-1)} + \beta\overrightarrow{(0,0,1,0)}\right) + \left(\gamma\overrightarrow{(1,0,1,0)}\right) + \left(\delta\overrightarrow{(0,1,0,-1)}\right) \implies$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2 & = & \alpha & & & + & \gamma & & \\ 1 & = & -\alpha & & & & & + & \delta \\ 0 & = & & & \beta & + & \gamma & & \\ -1 & = & -\alpha & & & & & - & \delta \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 0,\ \beta = -2,\ \gamma = 2,\ \delta = 1,$$

y entonces los pies de la perpendicular común son

$$Q_1 = P_1 + \left(0 \cdot \overrightarrow{(1,-1,0,-1)} + (-2) \cdot \overrightarrow{(0,0,1,0)}\right) = (-2,0,-2,0)$$

$$Q_2 = P_2 - \left(2 \cdot \overrightarrow{(1,0,1,0)}\right) = (-2,1,-2,-1),$$

y *una perpendicular común* (notemos que, como Y_1 e Y_2 no se cruzan, puede haber infinitas perpendiculares comunes) es

$$(-2,0,-2,0) + \langle\ \overrightarrow{(0,1,0,-1)}\ \rangle.$$

Por último,

$$d(Y_1,Y_2) = d(Q_1,Q_2) = \left|\left|\overrightarrow{Q_1Q_2}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{(0,1,0,-1)}\right|\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 2 (3 puntos).– Se considera el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ y el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}$, respecto del cual tomaremos coordenadas y ecuaciones. Sea Y la recta

$$Y : x_1 + x_2 = 2.$$

1. Hallar un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}' = \{O'; \underline{u}, \underline{v}\}$ tal que $O' \in Y$, $\underline{u} \in D(Y)$, $\underline{v} \in D(Y)^\perp$.
2. Hallar la matriz, respecto de $\mathcal{R}$, de la simetría de eje Y.

Solución: Claramente podemos tomar, por ejemplo, $O' = (1,1)$. Un vector de $D(Y)$ es $\overrightarrow{(1,-1)}$, mientras que uno de $D(Y)^\perp$ es $\overrightarrow{(1,1)}$. Para que $\mathcal{R}'$ sea sistema de referencia métrico la base vectorial asociada tiene que ser ortonormal. Obviamente los vectores son ortogonales; por lo que basta normalizarlos para tener una base ortonormal. Así,

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1,1); \overrightarrow{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}, \overrightarrow{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \right\}.$$

Para hallar la matriz de σ, la simetría de eje Y, notemos que

$$\sigma(O') = O', \quad \overrightarrow{\sigma}(\underline{u}) = \underline{u}, \quad \overrightarrow{\sigma}(\underline{v}) = -\underline{v};$$

por las propiedades de las simetrías hiperplanares. Entonces

$$M_{\mathcal{R}'}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$M_{\mathcal{R}}(\sigma) = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) M_{\mathcal{R}'}(\sigma) M(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio.– En el plano afín ordinario se considera la afinidad f de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Hallar los puntos invariantes de f.
2. Hallar las direcciones invariantes de f.
3. Hallar las rectas invariantes de f.
4. ¿Qué relación hay entre el/los punto(s) invariante(s) hallado(s) y la(s) recta(s) invariante(s) hallada(s)? No hay que hacer cálculos; se puede responder con un sencillo razonamiento.

Solución: Designemos por A a la matriz de la afinidad. Para hallar los puntos invariantes podemos, por ejemplo, sin pasar por el proyectivo, resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\,x_1 - 6\,x_2 \\ -4 + 2\,x_1 - 2\,x_2 \end{pmatrix}$$

Un cálculo sencillo nos da como punto invariante el $(12, 10)$.

Para hallar las direcciones invariantes podemos usar que las direcciones invariantes son las rectas de autovectores de $\overrightarrow{f}$, cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} \lambda - 6 & 6 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6\,,$$

cuyas raíces son 2 y 3. Al autovalor 2 corresponde la recta de autovectores $\langle\overrightarrow{(3,2)}\rangle$ y a 3 corresponde $\langle\overrightarrow{(2,1)}\rangle$.

Desde luego, una recta invariante debe tener una dirección invariante, luego, si no queremos hallar hiperplanos invariantes como en teoría, podemos optar por buscar rectas invariantes en las dos direcciones anteriores. Para la primera (y análogamente después para la segunda), se trata de hallar los puntos $P = (x_1, x_2)$ tales que $\overrightarrow{Pf(P)} \in \langle\overrightarrow{(3,2)}\rangle$.

Como

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{(5\,x_1 - 6\,x_2, -4 + 2\,x_1 - 2\,x_2)},$$

esos puntos P deberán verificar que

$$5\,x_1 - 6\,x_2 = 3\lambda; \qquad -4 + 2\,x_1 - 2\,x_2 = 2\lambda.$$

Despejando x_1 y x_2 en esas dos ecuaciones tenemos $x_1 = 12 + 3\lambda$, $x_2 = 10 + 2\lambda$ que son las paramétricas de la recta $-2\,x_1 - 6 + 3\,x_2 = 0$, única recta invariante de dirección $\langle\overrightarrow{(3,2)}\rangle$. De manera análoga se calcula que sólo hay una recta invariante de dirección $\langle\overrightarrow{(2,1)}\rangle$, que es $-x_1 - 8 + 2\,x_2 = 0$.

Como las rectas invariantes no son evidentemente paralelas, se deben cortar en un único punto. El transformado de este punto debe pertenecer a ambas, por ser rectas invariantes, luego es él mismo. Así el punto invariante hallado debe ser el de intersección de las dos rectas invariantes halladas, cosa que se puede comprobar trivialmente con un cálculo directo.

Ejercicio.– Consideremos el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, y un sistema de referencia afín fijado $\mathcal{R}_a = \{O; \underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Respecto de este sistema de referencia, tenemos afinidad dada por

$$f\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}.$$

1. Calcular los puntos invariantes de f.
2. Calcular las direcciones invariantes de f.
3. Calcular las rectas invariantes de f, usando las direcciones invariantes.

Solución.– 1. Se trata simplemente de resolver el sistema de ecuaciones

$$f\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{cases} -x & = x\\ -1+y & = y \end{cases},$$

y, por tanto, la variedad de puntos invariantes es vacía.

2. Podemos calcular las direcciones invariantes como los autovalores de $\overrightarrow{f}$. En este caso, como $\overrightarrow{f}$ viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

tiene, obviamente, dos autovalores,

$$\underline{u}_1 = \overrightarrow{(1,0)}, \qquad \underline{u}_2 = \overrightarrow{(0,1)}.$$

que son las direcciones invariantes.

3. Para que una recta sea invariante, su dirección debe serlo (pues es la intersección de una recta invariante con la recta del infinito, que también lo es). Por tanto, buscamos puntos $P = (x,y)$ cuya imagen esté en la recta $P + \underline{u}_1$ o $P + \underline{u}_2$.

En el primer caso, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$f(x,y) = (x,y) + \lambda\overrightarrow{(1,0)}$$

lo que da

$$-x = x + \lambda, \quad y - 1 = y;$$

que, evidentemente no tiene solución. En el segundo caso, la ecuación

$$f(x,y) = (x,y) + \lambda\overrightarrow{(0,1)},$$

da

$$-x = x, \quad y - 1 = y + \lambda;$$

que tiene como solución $x = 0$ y $\lambda = -1$. Esto quiere decir que todo punto de la forma $(0,y)$ verifica que su imagen está en la recta $(0,y) + \lambda\overrightarrow{(0,1)}$, o, de otra forma, que la recta $x = 0$ es invariante.

Ejercicio 1.– En $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, fijemos un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$. Sea la simetría σ de eje la recta $r = x + 2y - 1 = 0$.

1. Dar un sistema de referencia afín $\mathcal{R}' = \{O', \underline{u}', \underline{v}'\}$, tal que $O' \in r$, $\underline{u}' \in D(r)$, $\underline{v}' \in D(r)^{\perp}$.
2. Dar las ecuaciones de σ respecto de $\mathcal{R}'$.
3. Dar las ecuaciones de σ respecto de $\mathcal{R}$.

Solución.– 1. Tomaremos el sistema de referencia lo más sencillo posible. Para O', tomamos $O' = (1, 0)$; y para $\underline{u}'$, la dirección de r, a saber $\underline{u}' = \overrightarrow{(-2, 1)}$. Finalmente, la elección natural para $\underline{v}'$ es $\underline{v}' = \overrightarrow{(1, 2)}$.

2. Sabemos que $\sigma(O') = O'$, porque O' pertenece al eje de la simetría. Además, como la dirección de r es invariante, se tiene que $\overrightarrow{\sigma}(\underline{u}') = \underline{u}'$, y para un vector ortogonal se tiene $\overrightarrow{\sigma}(\underline{v}') = -\underline{v}'$. Por tanto, las ecuaciones de σ respecto $\mathcal{R}' = \{O'; \underline{u}', \underline{v}'\}$ son

$$A = M_{\mathcal{R}'}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Por el teorema de cambio de sistema de referencia, sabemos que

$$M_{\mathcal{R}}(\sigma) = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) M_{\mathcal{R}'(\sigma)} M(\mathcal{R}, \mathcal{R}').$$

Así si la matriz de cambio de sistema de referencia

$$B = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

se tiene

$$M_{\mathcal{R}}(\sigma) = BAB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -4/5 & -3/5. \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.– Sean, en $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$, las variedades lineales

$$L_1 : (1, 1, 1, 1, 0) + \langle \overrightarrow{(1, -1, 0, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 1, 2, 0)} \rangle, \qquad L_2 : \begin{cases} x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_3 - x_4 & = 1. \end{cases}$$

1. Determinar su posición relativa y cuántas perpendiculares comunes existen.
2. Calcular $d(L_1, L_2)$.

Solución.– 1. Casi siempre es útil averiguar primero la intersección. En este caso, las paraméricas de L_1 son

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 1+\lambda, \\ x_2 & = 1-\lambda, \\ x_3 & = 1+\mu, \\ x_4 & = 1+2\mu, \\ x_5 & = 0. \end{array}\right.$$

Es inmediato ver que la ltima ecuación, $x_5 = 0$ es incompatible con la primera ecuación implícita de L_2, y, por lo tanto, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Por tanto, tenemos que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + 1 - \dim\big(D(L_1) \cap D(L_2)\big).$$

Vemos que necesitamos calcular la intersección de las direcciones. Los respectivos sistemas de ecuaciones son

$$D(L_1) = \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = \lambda, \\ x_2 & = -\lambda, \\ x_3 & = \mu, \\ x_4 & = 2\mu, \\ x_5 & = 0. \end{array}\right. \quad \bigcap \quad D(L_2) = \left\{\begin{array}{ll} x_5 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_3 - x_4 & = 0. \end{array}\right.$$

Resolviendo, vemos que $D(L_1) = D(L_2)$, luego los planos son paralelos y $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Por tanto, existen infinitas perpendiculares comunes.

2. Calcularemos el ortogonal de $D(L_1) = D(L_2)$. De forma inmediata, tenemos

$$D(L_2)^\perp = \big\langle \overrightarrow{(0,0,0,0,1)}, \overrightarrow{(1,1,0,0,0)}, \overrightarrow{(0,0,2,-1,0)} \big\rangle.$$

Obsérvese que si tenemos unas ecuaciones implícitas independientes de $D(L_2)$, se obtiene un sistema de generadores de $D(L_2)^\perp$ simplemente tomando los coeficientes de las ecuaciones.

Sea ahora un punto P arbitrario en L_1. Sabemos que $\big(P + D(L_2)^\perp\big) \cap L_2$ es un único punto, que llamamos Q, y que

$$d(L_1, L_2) = d(P, Q).$$

Por tanto, tomando $P = (1,1,1,1,0)$, se trata de calcular

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 1+\lambda, \\ x_2 & = 1+\lambda, \\ x_3 & = 1+2\mu, \\ x_4 & = 1-\mu, \\ x_5 & = \nu \end{array}\right. \quad \bigcap \quad \left\{\begin{array}{ll} x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_3 - x_4 & = 1. \end{array}\right.$$

lo que da el punto $Q = (1,1,1,1,1)$. Así

$$d(P, Q) = d(L_1, L_2) = 1.$$

Ejercicio 1 (8 puntos).– Se da en el plano el movimiento f de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13/5 & -3/5 & -4/5 \\ -6/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar un vector no nulo que determine cada una de sus direcciones invariantes.
2. Hallar las rectas invariantes por f.
3. Hallar la matriz de la simetría s de eje la recta $2x+y-2=0$ y la del producto $s\circ f$.
4. ¿Qué tipo de movimiento es $s\circ f$?

Solución: No usaremos métodos proyectivos, aunque son una opción razonable: sólo utilizaremos la maquinaria afín–euclídea. La matriz de la parte vectorial del movimiento es

$$\begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix},$$

cuya matriz y polinomio característico son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \lambda+3/5 & 4/5 \\ 4/5 & \lambda-3/5 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2-1;$$

este último tiene como raíces $\lambda=\pm 1$. Sustituyendo estos valores en las matrices características, tenemos

$$\begin{pmatrix} 8/5 & 4/5 \\ 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix}.$$

que son las matrices de coeficientes de los sistemas a resolver para hallar las direcciones invariantes. Un vector representante de las soluciones del primer sistema es, evidentemente, $\overrightarrow{(1,-2)}$ y uno del segundo es $\overrightarrow{(2,1)}$.

Hallemos el eje de otra forma a la habitual, también general. Las rectas invariantes deben tener direcciones invariantes y, de éstas, sólo hay dos posibles que son las anteriores. Por lo tanto, si $P=(x,y)$ es un punto de una posible recta invariante, los pares

$$\{\overrightarrow{Pf(P)}, \overrightarrow{(1,-2)}\} \text{ y } \{\overrightarrow{Pf(P)}, \overrightarrow{(2,1)}\}$$

deben ser linealmente dependientes. Como

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \left(\frac{13}{5}-\frac{8}{5}\,,x-\frac{4}{5}\,y\,,-\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\,x-\frac{2}{y}\,y\right)$$

la condición de dependencia lineal entre $\overrightarrow{Pf(P)}$ y $\overrightarrow{(1,-2)}$ se traduce en $2x+y-2=0$ y la otra en $5=0$. Así pues, sólo hay una recta invariante por f, que es $2x+y-2=0$.

Observemos que el eje de la simetría dado es la recta invariante de f. Fijemos un punto genérico $P=(a,b)$. La perpendicular por P el eje tiene como ecuaciones paramétricas $x=a+2\lambda$, $y=$

$b+\lambda$ y cálculos triviales prueban que su punto de corte con el eje corresponde a $\lambda = (2-2a-b)/5$. Así,

$$\overrightarrow{Ps(P)} = 2\frac{2-2a-b}{5}\overrightarrow{(2,1)} = \overrightarrow{\left(\frac{8}{5} - \frac{8a}{5} - \frac{4b}{5}, \frac{4}{5} - \frac{4a}{5} - \frac{2b}{5}\right)}$$

con lo que

$$s(P) = P + \overrightarrow{Ps(P)} = \left(\frac{8}{5} - \frac{3a}{5} - \frac{4b}{5}, \frac{4}{5} - \frac{4a}{5} + \frac{3b}{5}\right)$$

y la matriz de s es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8/5 & -3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

La matriz de $s \circ f$ es, por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8/5 & -3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13/5 & -3/5 & -4/5 \\ -6/5 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y ésta última es la de la traslación de vector $\overrightarrow{(1,-2)}$.

Ejercicio 2 (2 puntos).– Hallar el hiperplano mediador de los puntos $P = (1,2,3,4)$ y $Q = (5,4,3,2)$ en el espacio euclídeo de dimensión 4.

Solución: El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $(3,3,3,3)$ y el vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(4,2,0,-2)}$. Así pues (dividiendo por 2) la ecuaciónn del hiperplano mediador es

$$0 = 2(x_1 - 3) + (x_2 - 3) - (x_4 - 3) = 2x_1 + x_2 - x_4 - 6.$$