E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Apuntes de

ÁLGEBRA LINEAL

para la titulación de

INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE GESTIÓN

Fco. Javier Cobos Gavala
Amparo Osuna Lucena
Rafael Robles Arias
Beatriz Silva Gallardo

departamento de matemática aplicada I

Contenido

1. Matrices y determinantes

1.1 Notación y definiciones

Definición 1.1 [Matriz]

Una matriz es una tabla de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Se suelen representar por letras mayúsculas $A, B, \ldots$, etc. y a sus *elementos* de la forma a_{ij} donde el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna a la que pertenece dicho elemento.

Así pues, una matriz $A = (a_{ij})$ con $1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.2 [Orden de una matriz]

Una matriz de m filas y n columnas se dice que tiene dimensión o que es de orden $m \times n$, y al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ lo denotaremos por $\mathbf{R}^{m \times n}$ (en el supuesto de que los elementos de la matriz A sean elementos de $\mathbf{R}$).

Dos matrices $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ se dice que son equidimensionales.

Dos matrices $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, se dice que son *iguales* si:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \;\text{ y }\; \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

Definición 1.3 [MATRICES FILA Y COLUMNA]

Se denomina matriz fila a aquella que consta de una única fila.

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \in \mathbf{R}^{1\times n}$$

De igual manera, se denomina matriz columna a aquella que consta de una única columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$$

Definición 1.4 [MATRIZ CUADRADA]

Se denomina matriz cuadrada de orden n a aquella que tiene n filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

Se denomina diagonal principal de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii} $\ i = 1,\ 2, \dots,\ n$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.5 [MATRICES DIAGONALES, ESCALARES Y UNIDAD]

Se denomina matriz diagonal a aquella matriz cuadrada cuyos elementos no diagonales son todos nulos. Es decir $a_{ij} = 0$ si $\ i \neq j$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz escalar a aquella matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos iguales.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz unidad de orden n a aquella matriz escalar cuyos elementos diagonales son todos unos. Es decir

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.6 [Matrices triangulares y escalonadas]

Se denomina matriz triangular superior (inferior) a aquella matriz cuadrada cuyos elementos situados por debajo (encima) de su diagonal principal son todos nulos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *Triangular superior:* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$.
- *Triangular inferior:* $a_{ij} = 0$ *si* $i < j$.

El equivalente para matrices rectangulares de una matriz triangular son las denominadas matrices escalonadas que son aquellas matrices en las que $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$.

En caso de tratarse de una matriz cuadrada se tendría una triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,m-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,m-1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\,m-1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Aritmética de matrices

- SUMA DE MATRICES

Sean $A,\ B \in \mathbf{R}^{m\times n}$, se denomina *matriz suma* de A y B, y se denota por $C = A + B$, a la matriz $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \ldots,\ m \quad j = 1, \ldots,\ n.$$

PROPIEDADES

- *Asociativa*:

$$\forall\, A,\ B,\ C \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow (A+B)+C = A+(B+C).$$

- *Conmutativa*: $\forall\, A,\ B \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A+B = B+A.$
- *Elemento neutro*: Existe la matriz $0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ denominada *matriz nula* y cuyos elementos son todos nulos, tal que

$$\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A+0 = 0+A = A.$$

- *Elemento opuesto*: Para cualquier matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ existe la matriz $-A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ denominada *matriz opuesta* y cuyos elementos son los opuestos de los elementos de la matriz A tal que

$$A + (-A) = -A + A = 0$$

Por tanto, $(\mathbf{R}^{m\times n}, +)$ es un *grupo conmutativo*.

- **Producto por un escalar**

  Sean $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbf{R}$, se define *producto por un escalar* de α por A a la matriz $\mathbf{R}^{m\times n}$ tal que sus elementos son los de A multiplicados por α. Se denota por αA.

  $$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

  Propiedades

  - *Asociativa*: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$
  - *Distributivas*:

  $$\begin{cases} \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ y } \forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A. \\ \\ \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ y } \forall\ A, B \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B. \end{cases}$$

  - *Elemento unidad*: $\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow 1 \cdot A = A.$

  Por tanto, $(\mathbf{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales.

  Para matrices complejas, $(\mathbf{C}^{m\times n}, +, \cdot)$ sería un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos.

- **Producto de matrices**

  Si $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbf{R}^{n\times p}$ (número de columnas de A igual al número de filas de B), se define la *matriz producto* de A por B como la matriz $C \in \mathbf{R}^{m\times p}$ tal que:

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le p$$

  Propiedades:

  - *Asociativa*:

  $$A \in \mathbf{R}^{m\times n} \quad B \in \mathbf{R}^{n\times p} \quad C \in \mathbf{R}^{p\times q} \Longrightarrow (AB)C = A(BC)$$

  - *Distributiva*:

  $$A \in \mathbf{R}^{m\times n} \quad B, C \in \mathbf{R}^{n\times p} \Longrightarrow A(B + C) = AB + AC$$

- *No conmutativa*: en general, es $AB \neq BA$.
- *No cancelativa*:

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C$$

Para el caso de matrices cuadradas de orden n:

- *Elemento unidad*: Existe $I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (matriz unidad de orden n) tal que

$$\forall\, A \in \mathbf{R}^{n\times n} \Longrightarrow I_n A = A I_n = A$$

- Si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ diremos que es *regular* o *no singular* si posee *matriz inversa*, es decir, si existe $A^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Trasposición

Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Se denomina *matriz traspuesta de A* y se denota por A^T a la matriz resultante de cambiar, ordenadamente, las filas por las columnas de la matriz A de tal manera, que si llamamos $A = (a_{ij})$ y $A^T = (a'_{ij})$ tenemos:

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$$

por lo que si $A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A^T \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Propiedades

- $(A^T)^T = A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ *o generalizando,* $(\sum_{i=1}^{n} A_i)^T = \sum_{i=1}^{n} A_i^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$ *o generalizando,* $(\prod_{i=1}^{n} A_i)^T = \prod_{i=n}^{1} A_i^T$.

Definición 1.7 [Matriz simétrica]

Una matriz cuadrada A se dice que es simétrica si coincide con su traspuesta. (Es simétrica respecto a su diagonal principal).

$$A \text{ simétrica} \iff A = A^T$$

Definición 1.8 [MATRIZ ANTISIMÉTRICA]

Una matriz cuadrada A se dice que es antisimétrica si coincide con la opuesta de su traspuesta. (Los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos y su diagonal es de ceros).

$$A \text{ antisimétrica} \iff A = -A^T$$

Definición 1.9 [MATRIZ ORTOGONAL]

Una matriz cuadrada y no singular se dice ortogonal si su traspuesta coincide con su inversa, es decir, si $A^T = A^{-1}$ o lo que es lo mismo:

$$A \text{ ortogonal} \iff AA^T = A^T A = I_n$$

Definición 1.10 [TRAZA DE UNA MATRIZ]

Se define la traza de A y se denota por $\operatorname{tr} A$ como la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA DE UNA MATRIZ

- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
- $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$.

1.3 Transformaciones elementales.

Se denominan *transformaciones elementales* a ciertas transformaciones que se realizan en una matriz y que nos serán de gran utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales así como en otras operaciones con matrices que estudiaremos en temas posteriores.

Estas transformaciones modifican, de determinadas formas, los elementos de una fila o una columna de la matriz o intercambian dos filas o columnas de esta. Las clasificaremos en dos grupos:

- Transformaciones elementales fila.
- Transformaciones elementales columna.

1.3.1 Transformaciones elementales fila.

- Transformaciones F_{ij}

  Intercambian las filas i y j de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

  Este efecto se produce al multiplicar, *por la izquierda*, la matriz A por la matriz F_{ij}, siendo esta el resultado de intercambiar las filas i y j de la matriz I_m.

  Ejemplo 1.1 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Para intercambiar las filas 2ª y 3ª aplicamos F_{23} cuya matriz es
  $F_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (en I_3 se han permutado las filas segunda y tercera).

$$F_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

  observándose que han quedado permutadas las filas segunda y tercera de la matriz A. $\square$

- Transformaciones $F_i(\alpha)$

  Multiplican la fila i de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ por un número $\alpha \neq 0$.

  Este efecto se produce al multiplicar, *por la izquierda*, la matriz A por la matriz $F_i(\alpha)$, siendo esta el resultado de multiplicar por α la fila i de la matriz I_m.

  Ejemplo 1.2 Para multiplicar por 3 la segunda fila de A (véase el Ejemplo 1.1), aplicamos $F_2(3)$ cuya matriz asociada es $F_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(se ha multiplicado por 3 la segunda fila de I_3).

$$F_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 12 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pudiéndose ver que ha quedado multiplicada por 3 la segunda fila de la matriz A. $\square$

- Transformaciones $F_{ij}(\alpha)$

  Suman a la fila i de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ su fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$.

  Este efecto se produce al multiplicar, *por la izquierda*, la matriz A por la matriz $F_{ij}(\alpha)$, siendo esta la resultante de sumar a la fila i de la matriz I_m su fila j multiplicada por α, es decir, la matriz resultante de sustituir el elemento $i_{ij} = 0$ por α.

  Ejemplo 1.3 Si queremos restar a la segunda fila de A (véase el Ejemplo 1.1) el doble de la primera, aplicamos $F_{21}(-2)$ cuya matriz asociada es $F_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha sustituido por -2 el elemento $i_{21} = 0$ de la matriz I_3).

$$F_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

  observándose que se ha producido en la matriz A el efecto deseado. $\square$

1.3.2 Transformaciones elementales columna.

Son las mismas que las transformaciones elementales fila pero operando por columnas:

- Transformaciones C_{ij}

  Intercambian las columnas i y j de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

  Este efecto se produce al multiplicar, *por la derecha*, la matriz A por la matriz C_{ij}, siendo esta el resultado de intercambiar las columnas i y j de la matriz I_n.

Ejemplo 1.4 Si deseamos intercambiar las columnas primera y cuarta de la matriz A (véase el Ejemplo 1.1), aplicamos C_{14} cuya matriz asociada es $C_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (se han permutado las columnas 1 y 4 de la matriz I_4).

$$AC_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se han permutado las columnas 1 y 4 de la matriz A. $\square$

- Transformaciones $C_i(\alpha)$

Multiplican la columna i de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ por un número $\alpha \neq 0$.

Este efecto se produce al multiplicar, *por la derecha*, la matriz A por la matriz $C_i(\alpha)$, siendo esta el resultado de multiplicar por α la columna i de la matriz I_n.

Ejemplo 1.5 Para multiplicar por 2 la tercera columna de la matriz A (véase el Ejemplo 1.1) aplicamos $C_3(2)$, cuya matriz asociada es

$C_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha multiplicado por 2 la tercera columna de I_4).

$$AC_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

habiendo quedado multiplicada por 2 la tercera columna de la matriz original A $\square$

- TRANSFORMACIONES $C_{ij}(\alpha)$

  Suman a la columna i de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ su columna j multiplicada por $\alpha \neq 0$.

  Este efecto se produce al multiplicar, *por la derecha*, la matriz A por la matriz $C_{ij}(\alpha)$, siendo esta la resultante de sumar a la columna i de la matriz I_n su columna j multiplicada por α, es decir, la matriz resultante de sustituir elemento $i_{ji} = 0$ por α.

  Ejemplo 1.6 Para sumar a la tercera columna de A (véase el Ejemplo 1.1) el doble de la primera aplicamos $C_{31}(2)$ cuya matriz asociada es $C_{31}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha sustituido el elemento i_{13} de la matriz I_4 por 2).

$$AC_{31}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

  donde puede observarse que se ha producido en A el efecto deseado. $\square$

1.4 Algoritmo de Gauss-Jordan.

Teorema 1.1 *Dada una matriz cualquiera $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ existen matrices F y U tales que $FA = U$ siendo U una matriz escalonada.*

Demostración. Probaremos el teorema de forma constructiva.

- Comencemos por anular todos los elementos a_{i1} con $1 < i \leq n$.

  - Si $a_{11} \neq 0$, mediante transformaciones elementales filas $F_{ij}(\alpha)$ podemos anular todos los elementos de la primera columna situados por debajo de él.

    Estas transformaciones serían de la forma $F_{i1}(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$.

- Si $a_{11} = 0$ y algún elemento de la primera columna es no nulo, podemos llevarlo al lugar (11) mediante una transformación F_{ij} y proceder después como en el caso anterior.
- Si $a_{i1} = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, \ m$, la primera columna es de ceros y por tanto, $a_{i1} = 0 \ \ \forall\, i > 1$, es decir, se trata de una columna del tipo de las matrices escalonadas.

- Procedemos después con a_{22} (el elemento a_{22} resultante de las transformaciones anteriores) al igual que procedimos con a_{11} anteriormente, es decir, si $a_{22} \neq 0$ lo utilizamos para hacer ceros por debajo de él en la segunda columna. Si fuese $a_{22} = 0$ vemos si existe por debajo de él algún elemento $a_{i2} \neq 0$ y, en caso de haberlo, realizamos la transformación F_{2i}, etc.
- Reiterando el proceso, llegamos a una matriz escalonada U.

La matriz F no es más que el producto de las matrices de las transformaciones elementales filas realizadas para pasar de A a U. ■

Ejemplo 1.7 Consideremos la matriz A del Ejercicio 1.1.

$$A \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} = U$$

que es una matriz escalonada. Dado que

$$F_{23}F_{31}(-\frac{1}{2})F_{21}(-2)A = U \Longrightarrow FA = U$$

con

$$F = F_{23}F_{31}(-\frac{1}{2})F_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Definición 1.11 [Matriz escalonada canónica]

Se denomina matriz escalonada canónica a una matriz escalonada con la propiedad de que el primer elemento no nulo de una fila es un uno y además, es el único elemento no nulo de su columna.

Teorema 1.2 *Toda matriz puede ser reducida mediante transformaciones elementales fila a una escalonada canónica.*

Demostración. Basta con observar que una vez obtenida la matriz U, si en una fila hay algún elemento no nulo, la dividimos por el primer elemento no nulo de ella mediante $F_i(\alpha)$ y lo utilizamos para hacer ceros todos los de su columna (que se encontrarán por encima de él). ∎

Ejemplo 1.8 En el Ejemplo 1.7 se vió que

$$A \longrightarrow U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

que se trata de una escalonada canónica. □

Los elementos que utilizamos para anular a los demás elementos de una columna se denominan *pivotes*. Si en un determinado paso del proceso de pasar de A a U alguna columna es de ceros, diremos que el correspondiente pivote es nulo.

Teorema 1.3 *Toda matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ puede, mediante transformaciones elementales, transformarse en una del tipo $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ teniendo en cuenta que para ello es necesario realizar tanto transformaciones fila como transformaciones columna.*

Ejemplo 1.9 Si nos fijamos en la matriz del Ejemplo 1.7 que transformamos, mediante transformaciones elementales fila (ver Ejercicio 1.8) en la escalonada canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

podemos ahora, mediante la composición de las transformaciones columna

$C_{31}(-\frac{9}{5})C_{32}(\frac{7}{5})C_{33}(-\frac{3}{5})$ llevarla a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & | & 0 \end{pmatrix}$. □

Teorema 1.4 *Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada posea inversa es que su forma escalonada canónica sea la matriz unidad.*

Demostración. Si su forma escalonada canónica es I_n, existe $F \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que $FA = I_n \Longrightarrow F = A^{-1}$.

Si existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I_n \Longrightarrow \exists\ F = A^{-1}$ tal que $FA = I_n$ y por tanto, I_n es la forma escalonada canónica de A. ■

Algoritmo de Gauss-Jordan

Este teorema nos permite calcular la matriz inversa, de una matriz dada, mediante transformaciones elementales (filas o columnas, pero no ambas simultáneamente).

El organigrama de la Figura 1.1, muestra el algoritmo de escalonamiento de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mediante transformaciones elementales filas. Cuando se alcanza la condición de parada, la nueva matriz A es una matriz escalonada.

Ejemplo 1.10 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$(I_3 \mid A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}(-3)}$$

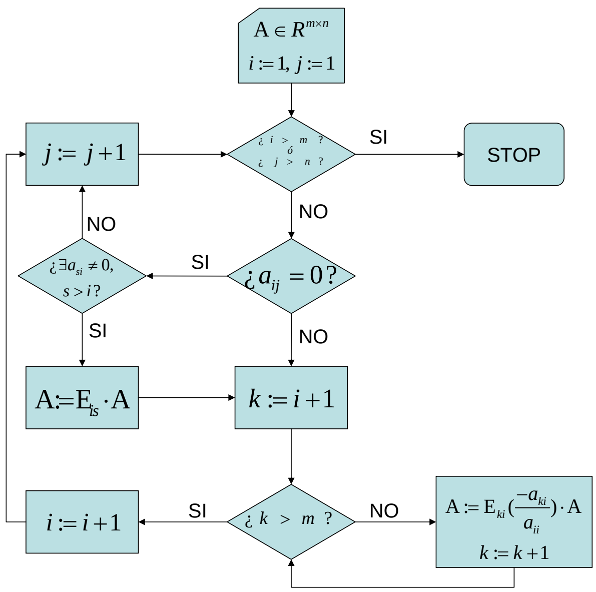

Figura 1.1: Organigrama del algoritmo de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{32}(1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}(3)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{23}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$F_{23}(-1)F_{13}(3)F_{32}(1)F_{12}(-3)F_{31}(-1)(A) = I_3 \Longrightarrow$$

$$[F_{23}(-1)F_{13}(3)F_{32}(1)F_{12}(-3)F_{31}(-1)]A = I_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = I_3 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

1.5 Determinante de una matriz cuadrada.

Los determinantes nos proporcionan un método para el cálculo de la matriz inversa de una dada (en caso de existir) y un criterio para estudiar si una matriz es o no invertible.

Sus aplicaciones son múltiples en todas las ramas de las ciencias que tratan problemas lineales en los que necesariamente aparecen matrices y por tanto, determinantes.

A cada matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \;\; 1 \leq i, j \leq n$ se le asigna un número real que llamaremos *determinante de A* y representaremos por $\det A$ o $|A|$.

Definición 1.12 [Submatrices y menores de una matriz]

Una submatriz de una matriz A es la matriz resultante de eliminar en A determinadas filas y/o columnas.

Un menor de una matriz A es el determinante de una submatriz cuadrada.

Definición 1.13 [Menor complementario y Adjunto de a_{ij}]

Se denomina menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada, y se denota por α_{ij}, al determinante de la submatriz obtenida al eliminar en A la fila i y la columna j.

Se denomina adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada, y lo denotaremos por A_{ij} a

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Fórmula recurrente para el cálculo de un determinante

El cálculo del determinante de una matriz cuadrada A puede ser realizado mediante la siguiente fórmula recurrente sobre el tamaño n:

- para $n = 1 \;\rightarrow\; A = (a_{11})$, se define $\det(A) = a_{11}$
- para $n > 1 \;\rightarrow\; \det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$ para cualquier k fijo con $1 \leq k \leq n$

Obsérvese que mediante esta fórmula recurrente, el cálculo de un determinante de una matriz de orden n se traslada al cálculo de n determinantes de otras tantas matrices de orden $n-1$, los menores complementarios de todos los elementos de la fila k-ésima.

Ejemplo 1.11 [Caso $n = 2$]

Sea A una matriz cuadrada de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

□

Ejemplo 1.12 [Caso $n = 3$]

Sea A una matriz cuadrada de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

□

Regla de Sarrus

Una forma nemotécnica para el desarrollo de un determinante de orden 3 consiste en repetir bajo la fila tercera las filas primera y segunda de la matriz.

Los productos de las tres diagonales resultantes en el sentido de la diagonal principal resultan ser los tres términos positivos del determinante, mientras que los productos de las diagonales en sentido contrario resultan ser los términos negativos del determinante.

$$\begin{array}{cccl} \multicolumn{4}{c}{\text{Términos positivos}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \longrightarrow a_{11}a_{22}a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \longrightarrow a_{21}a_{32}a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \longrightarrow a_{31}a_{12}a_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Términos negativos}} \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}a_{22}a_{31} \longleftarrow & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{23}a_{32}a_{11} \longleftarrow & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{33}a_{12}a_{21} \longleftarrow & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

1.5.1 Propiedades de los determinantes

1.- *El valor de* $\det A$ *no depende de la fila* k *elegida.*

2.- $\det A^T = \det A$.

Como consecuencia de esta propiedad, podemos dar una definición equivalente del determinante cambiando el papel de las filas por el de las columnas:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad \text{para cualquier } k \text{ fijo con } 1 \leq k \leq n$$

3.- *Si la matriz A posee una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es nulo.*

4.- *Si se intercambian dos líneas de A, el determinante cambia de signo.*

5.- *Si la matriz A tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es nulo.*

6.- *Si todos los elementos de una línea se multiplican por un número α, todo el determinante queda multiplicado por dicho número.*

7.- *Si la matriz A posee dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es nulo.*

8.- *Si descomponemos una línea (fila o columna) en suma de dos, podemos descomponer el determinante en suma de dos determinantes.*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

NO CONFUNDIR CON $\det(A+B) = \det A + \det B$

9.- *El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de líneas paralelas.*

10.- *Si una línea de la matriz A es combinación lineal de otras paralelas, su determinante es nulo.*

Teorema 1.5 *Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se verifica que:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

1.6 Factorización triangular.

El Teorema 1.1 nos garantizaba la existencia de una matriz F tal que $FA = U$ siendo U una matriz triangular superior.

Ampliaremos ahora ese resultado mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Dada una matriz A cualquiera, existen matrices P, L y U' tales que $PA = LU'$ siendo L triangular inferior y U' triangular superior.*

Demostración. La matriz F es el producto de intercambios del tipo F_{ij} y transformaciones del tipo $F_{ij}(\alpha)$. Dado que:

$$\begin{aligned} F_{ij}F_{ik}(\alpha) &= F_{jk}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{kj}(\alpha) &= F_{ki}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{hk}(\alpha) &= F_{hk}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{ki}(\alpha) &= F_{kj}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{jk}(\alpha) &= F_{ik}(\alpha)F_{ij} \end{aligned}$$

podemos llevar en F todas las transformaciones a la izquierda y todos los intercambios a la derecha:

$$F = (\text{Matriz de las transformaciones})\cdot(\text{Matriz de los intercambios})$$

llamando P a la matriz de los intercambios y L^{-1} a la de las transformaciones, tenemos:

$$L^{-1}PA = U' \Rightarrow PA = LU'$$

L^{-1} es una *triangular inferior con unos en la diagonal* y su inversa *L es una matriz del mismo tipo*. ■

Además, como en la diagonal de U' se encuentran los *pivotes*, podemos descomponerla en el producto DU donde *D es una matriz cuadrada y diagonal con sus elementos iguales a los pivotes* y *U una triangular superior con unos en su diagonal*. Por tanto, podemos decir que:

Dada cualquier matriz A, existen matrices P, L, D y U tales que $PA = LDU$ con las características dadas para P, L D y U.

Ejemplo 1.13 Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U'$$

que es una matriz triangular superior

$$F = F_{23}F_{31}(-3)F_{21}(-2) = F_{21}(-3)F_{23}F_{21}(-2) = F_{21}(-3)F_{32}(-2)F_{23} \Rightarrow$$

$$F = L^{-1}P \quad \text{con} \quad L^{-1} = F_{21}(-3)F_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = F_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A su vez $U' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = DU.$

Es decir: $PA = LDU$. □

Como P es un producto de matrices del tipo F_{ij} (intercambios) y dado que $\det F_{ij} = -1$, tenemos que $\det P = \pm 1$.

Por otra parte, sabemos que $\det L = \det U = 1$ por tratarse de matrices triangulares con sus diagonales de unos.

Dado que la matriz D es diagonal y sus elementos diagonales son los *pivotes*, se tiene que $\det D$ es el producto de los pivotes.

Por todo ello, tenemos que $\det A$ es el producto de los pivotes precedido de signo más o menos.

$$\det(A) = \pm \textit{ producto de los pivotes}$$

Este es el método utilizado en el algoritmo de cálculo del determinante mediante reducción.

1.7 Inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A habíamos visto que era inversible si y sólo si su forma escalonada canónica era la matriz unidad. Esto era posible si y sólo si todos los pivotes eran no nulos.

Al ser $\det A = \pm$ producto de los pivotes podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 1.7 *A es inversible si, y sólo si, $\det A \neq 0$.*

Teorema 1.8 *Una matriz es singular $(\det A = 0)$ si, y sólo si, tiene una línea combinación lineal de las paralelas.*

Demostración.

a) Si $\det A = 0$ algún pivote es nulo, por lo que su forma escalonada canónica tiene una fila de ceros. Deshaciendo las transformaciones efectuadas, esa fila era necesariamente combinación lineal de las demás.

b) Si una fila es combinación lineal de las demás, por la propiedad 9 de los determinantes se tiene que $\det(A) = 0$ y por tanto, A es singular. ∎

Propiedades de la matriz inversa

- *La matriz inversa, en caso de existir, es única.*

  Supongamos que existieran dos inversas A_1 y A_2 de la matriz A. Entonces,
  $$(A_1A)A_2 = A_1(AA_2) \Rightarrow IA_2 = A_1I \Rightarrow A_1 = A_2.$$

- *Si la matriz producto AB posee inversa, A y B también las tienen y se verifica que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

  AB inversible $\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow$
  $$\left\{\begin{array}{l} \det A \neq 0 \implies \exists\, A^{-1} \\ \det B \neq 0 \implies \exists\, B^{-1} \end{array}\right.$$
  $$(AB)^{-1}AB = I \Rightarrow (AB)^{-1}ABB^{-1} = IB^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1}A = B^{-1} \Rightarrow$$
  $$(AB)^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- *Si A posee inversa A^{-1} se verifica que* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

$$A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det I \implies$$

$$\det A^{-1} \cdot \det A = 1 \implies \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

1.7.1 Cálculo de la matriz inversa.

Proposición 1.9 *La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela es cero.*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq i$$

Demostración. Este sumatorio correspondería al desarrollo de un determinante con las filas k e i iguales. ■

Definición 1.14 *Se denomina matriz adjunta de A y se denota por* Adj A *a la matriz resultante de sustituir cada elemento de la matriz cuadrada A por su adjunto.*

Proposición 1.10 $A \cdot \text{Adj } A^T = \det A \cdot I$.

Demostración. Sea $C = A \cdot \text{Adj } A^T$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{con} \quad b_{kj} = A_{jk} \implies c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

- Si $i \neq j \implies c_{ij} = 0$ (suma de los productos de los elementos de la fila i por los adjuntos de los de la fila j).

- Si $i = j \implies c_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det A \implies C = \det A \cdot I \implies$

$$A \cdot \text{Adj } A^T = \det A \cdot I.$$

Corolario 1.11 *Si A es inversible*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

¿Qué coste conlleva el cálculo de la inversa de una matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$?

- Calculando $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \mathrm{AdjA}^{\mathrm{T}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \det A \;\sim\; n \text{ determinantes de orden } n-1. \\ A_{ij}\ \forall\, i,j \to n^2 \text{ determinantes de orden } n-1. \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

  Un total de $n^2 + n$ determinantes de orden $n-1$.

  El proceso es $\mathcal{O}((n+1)!)$

- Mediante transformaciones elementales (Gauss-Jordan)

$$\left.\begin{array}{l} n-1 \text{ transformaciones con cada uno de los } n \text{ pivotes.} \\ n \text{ operaciones para cada transformación.} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

  Un total de $n^3 - n^2$ operaciones.

  El proceso es $\mathcal{O}(n^3)$

Con un ordenador que realice un millón de operaciones por segundo estimaríamos un tiempo de cálculo para el determinante de una matriz cuadrada de orden 100 de

- Calculando $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \mathrm{AdjA}^{\mathrm{T}}$. $\longrightarrow$ $3 \cdot 10^{139}$ *millones de años*.
- Mediante transformaciones elementales. $\longrightarrow$ 1 *segundo*.

1.8 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar una fórmula para A^n, siendo n un entero positivo.

SOLUCIÓN:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probemos por inducción en n que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para $n = 1$ se verifica.
- Si $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & n+1 \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbf{Z}^+$$

■

Ejercicio 1.2 Dada la matriz $A = I_n - \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, probar que:

a) Es simétrica.

b) $A^2 = A$.

c) $\operatorname{tr} A = n - 1$.

Solución: Denotemos por $u_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$

a) $A = I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T$

$$A^T = (I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T)^T = I_n^T - \frac{1}{n}(u_n u_n^T)^T = I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T = A$$

por lo que A *es simétrica*.

b)

$$A^2 = (I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T)(I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T) = I_n^2 - \frac{2}{n}u_n u_n^T + \frac{1}{n^2}u_n u_n^T u_n u_n^T =$$
$$= I_n - \frac{2}{n}u_n u_n^T + \frac{1}{n^2}u_n\, n\, u_n^T = I_n - \frac{2}{n}u_n u_n^T + \frac{1}{n}u_n u_n^T =$$
$$= I_n - \frac{1}{n}u_n u_n^T = A \implies A^2 = A$$

c) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} I_n - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(u_n u_n^T) = n - \frac{1}{n}n = n - 1.$ ■

Ejercicio 1.3 Demostrar que el determinante de una matriz de orden $n \geq 2$ con todos sus elementos iguales a ± 1 es siempre un número par.

Solución: Cuando al escalonar la matriz hacemos ceros por debajo del elemento a_{11} todos los elementos de la matriz a_ij con $i, j \geq 2$ sólo pueden resultar 0, 2 ó -2, por lo que al desarrollar por la primera columna nos queda un determinante con todos sus elementos pares y, por tanto, *el determinante es par*.

Puede verse en el siguiente ejemplo

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

resultando un determinante con todos sus elementos pares. ■

Ejercicio 1.4 Los *determinantes de Vandermonde* son de la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Demostrar que el valor de este determinante es

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

SOLUCIÓN: Basta observar que si restamos a cada fila la anterior multiplicada por a_1 obtenemos que el determinante es el mismo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

que es otro Vandermonde de un orden inferior en el que falta a_1, por lo que resultará el producto de $(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)$ por un nuevo Vandermonde de otro orden inferior en el que falte ahora a_2 y así sucesivamente, por lo que el determinante buscado resulta ser $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$ ■

1.9 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.5 Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. ¿Es conmutativo este producto?

Sol: Es conmutativo.

Ejercicio 1.6 Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyo cuadrado sea nulo.

Sol: $\begin{pmatrix} ac & -a^2 \\ c^2 & -ac \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.7 Hallar las potencias n-ésimas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Sol: $A^n = 3^{n-1}A, \quad B^n = \alpha^{n-1}\begin{pmatrix} \alpha & n \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.8 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, dando en cada caso una demostración o un contraejemplo, según corresponda:

a) Si A y B son simétricas, entonces $A\,B$ es simétrica.

b) Si A es simétrica y P es cuadrada, entonces PAP^T es simétrica.

c) Si A es una matriz cualquiera, entonces AA^T y A^TA son simétricas.

d) Si $A\,B$ es simétrica, entonces A y B también lo son.

Sol: V,V,V,F.

Ejercicio 1.9 Demostrar que una matriz cuadrada de orden n puede descomponerse de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Realizar la descomposición de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Sol: $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1.10 Sea A una matriz antisimétrica. Demostrar:

a) A^2 es simétrica.

b) Si B es simétrica, entonces $A\,B$ es simétrica si, y sólo si $A\,B = -B\,A$.

Ejercicio 1.11 Hallar todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sol: Las matrices escalares de orden 2.

Ejercicio 1.12 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

Sol: 2, $\quad x^3 - 3x + 2, \quad x^3 + 3x^2$.

Ejercicio 1.13 Calcular los siguientes determinantes por dos procedimientos: desarrollando por los elementos de la primera fila y mediante triangularización por transformaciones elementales.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Sol: 276 y 4.

Ejercicio 1.14 Demostrar que el determinante del producto de una matriz 2×1 por otra 1×2 es siempre cero.

Sol: Observar que tiene las columnas proporcionales.

Ejercicio 1.15 ¿Es cierto que el determinante de una matriz *antisimétrica* es siempre cero?

Sol: Sólo si es de orden impar.

Ejercicio 1.16 Sabiendo que los números 23715, 23529, 21359, 19437 y 17453 son múltiplos de 31, probar que el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

es divisible por 31, *sin calcular el determinante*.

Ejercicio 1.17 Hallar los posibles valores del determinante de una matriz A en cada uno de los casos siguientes:

a) A es *idempotente*, es decir $A^2 = A$.

b) A es *ortogonal*, es decir $AA^T = I$.

c) A es *k-nilpotente*, es decir existe k tal que $A^k = 0$.

Sol: a) 1, b) ± 1 y c) 0.

Ejercicio 1.18 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

Sol: $n!$ y $(n-1)!$.

Ejercicio 1.19 Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Sol: $x^3(x+4) = 0 \implies 0, 0, 0, -4$.

Ejercicio 1.20 Calcular el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: $n+1$ y $2^n - 1$.

Ejercicio 1.21 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Sol: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ y $(a-b)^{n-1}(a-(n-1)b)$.

2. Sistemas de ecuaciones lineales. Espacios vectoriales.

Uno de los problemas fundamentales del Álgebra Lineal es la resolución simultánea de ecuaciones lineales, siendo el caso más simple aquel en el que el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones.

Desde los textos de secundaria se proponen dos métodos para resolver tales sistemas de ecuaciones lineales: *eliminación* y *determinantes*.

El primer método, eliminación, consiste en sustraer múltiplos de la primera ecuación de las restantes, de tal manera que sea posible eliminar una misma incógnita en el resto de las ecuaciones, con lo que se obtiene un sistema con una ecuación y una incógnita menos. El proceso se repite una y otra vez hasta que sólo queda una ecuación con una incógnita, que se resuelve inmediatamente. No es difícil recorrer los pasos seguidos en sentido contrario y calcular el resto de las incógnitas. El procedimiento permite además detectar aquellos casos en que no existe solución o, por el contrario, existe infinidad de ellas.

El segundo método, determinantes, más complicado, introduce la idea de los determinantes y mediante la *regla de Cramer* se obtienen las soluciones como cocientes de dos determinantes. Su estudio no será abordado en esta asignatura. El coste de cálculo de dicho método lo hace viable para tamaño $n = 2$ o 3, pero cuando se trata de resolver sistemas con un número grande de incógnitas, se utiliza el método de eliminación, de coste bastante inferior.

Esta primera parte corresponde al Álgebra Clásica que se ocupa, fundamentalmente, de la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. La segunda parte corresponde al Álgebra Moderna, que estudia las llamadas estructuras algebraicas. Éstas se pueden interpretar como sistemas de elementos entre los que se definen operaciones similares a las que podemos realizar con números. El estudio abstracto de tales estructuras permite su aplicación casi inmediata en numerosos áreas donde aparecen estructuras particulares de forma natural, lo que pone de manifiesto la unidad profunda entre los diversos campos de la matemática. Una de las estructuras algebraicas más relevantes, dentro del álgebra lineal, es la estructura de *espacio vectorial*, íntimamente ligada al estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.1 Notación y definiciones

- Se denomina *sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas* a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

  siendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las incógnitas del sistema y todos los a_{ij} y b_i representan valores escalares pertenecientes a un cuerpo de números, $\mathbf{K}$, que para nuestros propósitos en esta asignatura corresponderá con el cuerpo de los números reales, $\mathbf{R}$.

- Una *solución del sistema* consiste en la asignación de valores de $\mathbf{R}$ a cada una de las incógnitas de tal forma que se verifique cada una de las ecuaciones que componen el sistema.

- Sea $\mathcal{S}(S)$ el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema S. Se pueden presentar los siguientes casos:

  * Si $\mathcal{S}(S) = \emptyset \implies$ *Sistema Incompatible*
  * Si $\mathcal{S}(S) \neq \emptyset \implies$ *Sistema Compatible*

    – $\mathcal{S}(S)$ unitario $\implies$ *Compatible determinado*

    – $\mathcal{S}(S)$ no unitario $\implies$ *Compatible indeterminado*

- Dos ecuaciones se dicen *equivalentes* cuando las soluciones de la primera lo son también de la segunda y viceversa. Por extensión, dos sistemas se dicen *equivalentes* cuando sus conjuntos de soluciones son idénticos.

Propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales

- *Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un escalar (real) no nulo, la ecuación resultante es equivalente a la primitiva.*

- *Si se suman, miembro a miembro, dos ecuaciones con soluciones comunes, la ecuación resultante conserva las soluciones comunes.*

Los sistemas lineales admiten una sencilla representación matricial. Así, podemos denotar $Ax = b$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

gracias a la definición dada para el producto entre matrices y la de igualdad entre matrices.

Es importante observar que en esta notación matricial se establece un orden para las variables del sistema ya que los coeficientes asociados a una variable se corresponden con una columna de la matriz A, llamada por ello *matriz de los coeficientes*; x es la matriz de las variables y b es la matriz de los *términos independientes* del sistema.

Para hacer más operativa la notación a la hora de resolver sistemas lineales, podemos prescindir de la matriz columna de las variables del sistema y en su lugar representar el sistema mediante una única *matriz ampliada*, $(A|b)$, que consiste en añadir a la matriz A una última columna correspondiente a la matriz b. De esta forma, una vez ordenadas las variables del sistema podemos identificar visualmente cada fila de la nueva matriz con una de las ecuaciones del sistema. Las propiedades enunciadas anteriormente pueden expresarse ahora en términos de las transformaciones elementales fila.

- *Si se aplica a la matriz ampliada de un sistema una transformación elemental fila $F_i(\alpha)$, con α no nulo, la matriz resultante representa un sistema lineal equivalente al anterior.*

- *Si se aplica a la matriz ampliada de un sistema una transformación elemental fila $F_{ij}(1)$, la matriz resultante representa un sistema lineal equivalente al anterior.*

Evidentemente, la combinación de ambos tipos de transformaciones elementales, nos permite aplicar transformaciones fila del tipo $F_{ij}(\alpha)$, obteniéndose sistemas equivalentes.

Finalmente, la transformación elemental F_{ij} tan solo representa una permuta entre las ecuaciones i-ésima y j-ésima, por lo que resulta un sistema equivalente.

Estamos en condiciones de abordar el primer método para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.2 Método de eliminación gaussiana

Este método de resolución de sistemas de ecuaciones admite una fácil programación, lo que permite resolver un sistema con la ayuda del ordenador.

La idea del método consiste en aplicar a la matriz ampliada del sistema transformaciones elementales sobre las filas (no pueden realizarse transformaciones columna) obteniendo, de esta forma, sistemas equivalentes al dado pero cada vez más manejables. Mediante transformaciones, se consigue obtener un sistema equivalente al dado que tiene por matriz de los coeficientes una matriz escalonada. La notación quedará simplificada empleando matrices ampliadas para representar en todo momento a los sistemas lineales equivalentes que resultan tras las transformaciones.

Vamos a iniciar el método con un ejemplo de orden tres.

Ejemplo 2.1 Sea el sistema:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

y nuestro problema es determinar los valores de $x,\ y,\ z$.

En primer lugar, tomaremos la matriz ampliada del sistema, siguiendo el orden natural para las variables de mismo:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Este método, también conocido como de *eliminaciones sucesivas o método de escalonamiento* comienza restando múltiplos de la primera ecuación (fila) a las restantes, con el fin de eliminar una incógnita, la x de las últimas ecuaciones. Para ello:

- Sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2.
- Sumamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por 1.

$$(A|b) \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

El resultado es un sistema equivalente al dado:

$$S' \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -y & - & 2z & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 \end{array} \right.$$

El coeficiente de x en la primera ecuación se denomina *pivote*.

En el segundo paso, ignoramos la primera ecuación y aplicamos el proceso a las dos ecuaciones restantes, donde las incógnitas son y y z. En este caso, el pivote es -1 (coeficiente de y en la segunda ecuación).

- Sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

y llegamos al sistema equivalente:

$$S'' \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & - & 4z & = & -4 \end{array} \right.$$

Ahora, el proceso de eliminación está completo.

Hay un orden evidente para resolver este sistema: de la última ecuación obtenemos

$$-4z = -4 \implies z = 1$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos

$$-y - 2 = -4 \implies y = 2$$

Por último, sustituyendo ambos resultados en la primera ecuación, se obtiene

$$2x + 2 + 1 = 1 \implies x = -1$$

Este proceso para obtener los valores de las incógnitas, se conoce con el nombre de *sustitución regresiva*. □

Es fácil entender cómo podemos extender la idea de la eliminación gaussiana a un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas:

a) En un primer paso, utilizamos múltiplos de la primera ecuación para anular todos los coeficientes bajo el primer pivote.

b) A continuación, se anula la segunda columna bajo el segundo pivote, etc.

c) La última columna contiene sólo a la última de las incógnitas.

d) La sustitución regresiva conduce a la solución en sentido contrario, es decir, comenzando por la última incógnita hasta llegar a la primera.

¿Conduce siempre a la solución el proceso de eliminación gaussiana?

y, en caso contrario

¿Bajo qué condiciones puede fallar el proceso?

Ejemplo 2.2 Para resolver el sistema

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Procedemos a escalonar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)}$$

$$\xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La presencia de la última *fila de ceros* indica que existían dos ecuaciones proporcionales en el último paso (la segunda y tercera ecuaciones son idénticas) por lo que puede ser eliminada del sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & -z & = & 0 \end{array} \right.$$

La sustitución regresiva, proporciona los valores $z = 0$ y $x = 1 - y$.

Obsérvese que en este ejemplo existe una relación de dependencia entre las variables x e y. Si tomamos un valor cualquiera para y, éste determina otro para la x.

Existen *infinitas soluciones* en este caso, que podemos expresar de forma paramétrica como

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Se dice que y actúa como *variable independiente* y x, z son *variables dependientes*.

Estamos ante un *sistema compatible indeterminado*. □

Ejemplo 2.3 Para resolver el sistema

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & 5y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Una vez más procedemos a escalonar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La última fila representa la ecuación $0x + 0y + 0z = 3$ lo que produce un sistema incompatible ya que $0 \neq 3$.

Por tanto, *no hay soluciones para nuestro sistema original*.

Se trata de un *sistema incompatible*. $\square$

Tras estos tres ejemplos, podemos analizar el comportamiento del método de eliminación gaussiana en relación con los pivotes del método de escalonamiento de Gauss-Jordan.

- El caso de *sistema incompatible* (Ejemplo 2.3) se identifica fácilmente por el hecho de que existe un pivote en la última columna de la matriz ampliada.
- En caso contrario, resulta un *sistema compatible*
  - *Determinado* si el número de pivotes coincide con el de variables.
  - *Indeterminado* si el número de pivotes es menor que el de variables.

¿Qué coste computacional tiene el algoritmo de eliminación para resolver un sistema $n \times n$?

En el primer paso hay que realizar una operación por cada término de la primera ecuación para cada una de las $n - 1$ ecuaciones que hay debajo:

$$n(n-1) = n^2 - n \quad \text{operaciones.}$$

En el segundo paso $(n-1)^2 - (n-1)$, etc. hasta $(2-1)^2 - (2-1)$. Es decir, en total:

$$(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3 - n}{3}$$

por lo que es de orden $\mathcal{O}(n^3)$.

La sustitución regresiva requiere $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)n}{2} \implies \mathcal{O}(n^2)$.

Por lo que en total, podemos decir que el método de eliminación gaussiana es de orden $\mathcal{O}(n^3)$.

Aunque no incluiremos aquí su demostración, el orden del método de Cramer es $\mathcal{O}((n+1)!)$.

Resulta evidente el considerable ahorro de tiempo que supone el método de eliminación gaussiana frente a la regla de Cramer.

2.2.1 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es *homogéneo* cuando todos sus términos independientes son nulos, es decir, es un sistema del tipo:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right.$$

De la sección anterior se deduce que si aplicamos el método de eliminación gaussiana, puesto que la matriz ampliada tiene su última columna nula, por más transformaciones elementales fila que hagamos, siempre resultará otra columna nula.

En conclusión: nunca habrá un pivote en esa columna y por tanto el sistema siempre es compatible. Si el número de pivotes es igual al número de variables, el sistema es compatible determinado con solución única *trivial (todas las variables toman el valor nulo)* mientras que si el número de pivotes es menor, habrá infinitas soluciones y el sistema es compatible indeterminado.

Podemos por tanto clasificar a los sistemas homogéneos como

- *incompatibles*: aquellos que sólo admiten la solución trivial.
- *compatibles*: aquellos que admiten infinitas soluciones.

Al resolver un sistema homogéneo compatible mediante eliminación gaussiana, las variables asociadas a las columnas que contienen a los pivotes se denominan *variables dependientes*, siendo todas las demás *variables independientes*.

Podemos despejar, mediante sustitución regresiva, las variables dependientes en función de las independientes. Las infinitas soluciones pueden expresarse mediante una serie de parámetros, tantos como variables independientes haya. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.4 Resolvamos el sistema homogéneo:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Como ya comentamos, la matriz ampliada tiene su última columna llena de ceros y éstos permanecerán por muchas transformaciones elementales fila que hagamos. Así pues, para resolver sistemas homogéneos mediante escalonamiento se prescinde de emplear la matriz ampliada y en su lugar tomamos simplemente la matriz de los coeficientes. Procedemos a escalonar dicha matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -3/2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-\frac{3}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & -7/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Aunque el proceso de escalonamiento ha concluido, podemos simplificar algunas ecuaciones aplicando ahora

$$\xrightarrow{F_{2}(\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3}(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

con lo que resulta el sistema equivalente

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

Los pivotes se encuentran sobre las tres primeras columnas por lo que tomaremos como variables dependientes $x,\ y,\ z$, resultando t la única variable independiente.

El sistema homogéneo es compatible; presenta infinitas soluciones que podemos expresar, paramétricamente, como

$$x = \frac{1}{2}\lambda \quad y = -\frac{1}{2}\lambda \quad z = \frac{3}{2}\lambda \quad t = \lambda$$

Habitualmente, cuando los cálculos se realizan a mano, con objeto de reducir la cantidad de anotaciones, se realizan transformaciones elementales paralelamente a varias filas a la vez. Por otra parte, también es deseable evitar, en la medida de lo posible, la manipulación de fracciones. Para ello, realizaremos transformaciones entre las filas que denotaremos $a\ F_i - b\ F_j$ y que representan el equivalente a dos transformaciones elementales filas consecutivas: $F_i(a)$

seguida de $F_{ij}(-b)$. Así, el procedimiento de escalonamiento de la matriz de coeficientes, puede expresarme más abreviadamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ 3F_3 + 5F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 24 & -36 \end{pmatrix}$$

Aunque no se sigue el método de Gauss-Jordan en sentido estricto, los sistemas resultantes también son equivalentes. En nuestro ejemplo, las dos últimas filas son proporcionales a las obtenidas anteriormente. $\square$

2.3 Espacios Vectoriales

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y del conjunto de sus soluciones nos llevará a definir la estructura algebraica de *espacio vectorial*. Para ello, vamos en primer lugar a interpretar los sistemas bajo otra notación, de tipo vectorial.

Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos escribirlo de la forma:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b \tag{2.5}$$

donde $a_i \in \mathbf{R}^m$ $1 \leq i \leq n$ representan las columnas de la matriz A, y $b \in \mathbf{R}^m$ a los términos independientes.

Las columnas a_i $(1 \leq i \leq n)$ así como b se denominan *vectores*, mientras que los x_i $(1 \leq i \leq n)$ se denominan *escalares*.

En la expresión (2.5) existen dos tipos de operaciones:

- Producto de escalar por vector.
- Suma de vectores.

Dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma de vectores

- *Ley de composición interna*:

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n \implies x + y \in \mathbf{R}^n$$

- *Asociativa*:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}^n \implies (x + y) + z = x + (y + z)$$

- *Elemento neutro*:

$$\exists\, 0 \in \mathbf{R}^n \ \text{ tal que } \ 0 + x = x + 0 \ \ \forall\, x \in \mathbf{R}^n$$

- *Elemento opuesto*:

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^n \ \ \exists - x \in \mathbf{R}^n \ \text{ tal que } \ x + (-x) = (-x) + x = 0$$

- *Conmutativa*:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}^n \implies x + y = y + x$$

Se dice que el conjunto de los vectores de $\mathbf{R}^n$ para la operación de la suma, $[\mathbf{R}^n, \ +]$, tiene estructura de *grupo conmutativo*.

Propiedades del producto por un escalar

- *Ley de composición externa*:

$$\forall\, \lambda \in \mathbf{R} \ \text{ y } \ \forall\, x \in \mathbf{R}^n \implies \lambda x \in \mathbf{R}^n$$

- *Asociativa de los escalares*:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \ \text{ y } \ \forall\, x \in \mathbf{R}^n \implies \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

- *Distributivas*:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \;\text{ y }\; \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n \implies \begin{cases} \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \\ \\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \end{cases}$$

- *Elemento unidad*:

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^n \implies 1 \cdot x = x$$

Se dice que el conjunto de los vectores de $\mathbf{R}^n$ para las operaciones de la suma y el producto por un escalar, $[\mathbf{R}^n,\ +,\ \cdot]$, tiene estructura de *espacio vectorial*.

La definición anterior se puede extender a un conjunto V diferente de $\mathbf{R}^n$.

Definición 2.1 ESPACIO VECTORIAL

Dado un conjunto V en el que se han definido dos operaciones, una interna, la suma, y otra externa, producto por un escalar, verificando las diez propiedades anteriores, se dice que $[V,\ +,\ \cdot]$ es un espacio vectorial real (o sobre $\mathbf{R}$).

Así, por ejemplo, son espacios vectoriales:

- El conjunto de las matrices cuadradas de orden 3, $\mathbf{R}^{3\times 3}$, junto a las operaciones de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz.
- Los polinomios en una variable x, $P[x]$, junto a las operaciones de suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar.
- El conjunto de las sucesiones de números reales, $\mathbf{R}^\infty$, junto a la suma de sucesiones (término a término) y producto de una sucesión por un escalar (que se realiza, igualmente, término a término).
- El espacio de las funciones, $f(x)$, reales de una variable real, x, definidas en el intervalo $[0,1]$, junto a la suma de funciones, que se define como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, y al producto de una función por un escalar, definido como $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
- Si en $\mathbf{R}^2$ consideramos: $\begin{cases} (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \\ \alpha(x,y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y) \end{cases}$

$[\mathbf{R}^2,\ +,\ \cdot]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

Sin embargo, si en $\mathbf{R}^2$ consideramos: $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha(x, y) = (\alpha x, 0) \end{cases}$

$$[\mathbf{R}^2, \ + \ \cdot] \ \text{ no es un espacio vectorial sobre } \mathbf{R}$$

ya que $1 \cdot x \neq x$, pues $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 0) = (x, 0) \neq (x, y)$.

La definición formal de espacio vectorial nos permite pensar en otros entes como vectores, siempre y cuando la suma y el producto por un escalar cumplan las 10 propiedades exigidas. Así, por ejemplo, pueden tratarse como vectores las matrices, las sucesiones, los polinomios y las funciones, entre otros muchos.

Propiedades de un espacio vectorial

Un espacio vectorial real $[V, \ +, \ \cdot]$ cumple las siguientes propiedades:

- *Los elementos neutro y opuestos son únicos.*

  Sean 0 y $0'$ elementos neutros:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 0 + 0' \ \text{ por ser } 0' \text{ neutro} \\ 0' = 0 + 0' \ \text{ por ser } 0 \text{ neutro} \end{array}\right\} \Longrightarrow \ 0 = 0'$$

  Sean x' y x'' opuestos de x.

$$(x' + x) + x'' = x' + (x + x'') \ \Longrightarrow \ 0 + x'' = x' + 0 \ \Longrightarrow \ x'' = x'$$

- $\alpha 0 = 0 \ \ \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

$$\alpha x = \alpha(x + 0) = \alpha x + \alpha 0 \ \Longrightarrow \ \alpha 0 = 0$$

- $0x = 0 \ \ \forall x \in V$.

$$\alpha x = (0 + \alpha)x = 0x + \alpha x \ \Longrightarrow \ 0x = 0$$

- $\alpha x = 0 \ \Longrightarrow \ \alpha = 0$ o $x = 0$.

  Debemos probar que si $\alpha x = 0$ y $\alpha \neq 0$ entonces ha de ser, necesariamente, $x = 0$.

$$\alpha x = 0 \ \text{ y } \ \alpha \neq 0 \ \Longrightarrow \ \exists\, \alpha^{-1} \ : \ \alpha^{-1}\alpha = 1 \ \Longrightarrow$$

$$\alpha^{-1}\alpha x = \alpha^{-1}0 \ \Longrightarrow \ 1x = 0 \ \Longrightarrow \ x = 0$$

- $\alpha x = \alpha y$ y $\alpha \neq 0 \implies x = y$.

$$\alpha x = \alpha y \text{ y } \alpha \neq 0 \implies \alpha x + (-\alpha y) = 0 \implies$$

$$\alpha^{-1}\alpha x + \alpha^{-1}(-\alpha y) = 0 \implies x + (-y) = 0 \implies x = y$$

- $\alpha x = \beta x$ y $x \neq 0 \implies \alpha = \beta$.

$$\alpha x = \beta x \text{ y } x \neq 0 \implies \alpha x - \beta x = 0 \implies$$

$$(\alpha - \beta)x = 0 \implies \alpha - \beta = 0 \implies \alpha = \beta$$

- $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.

  * $(-\alpha)x = (0 - \alpha)x = 0x - \alpha x = 0 - \alpha x = -\alpha x$.

  * $\alpha(-x) = \alpha(0 - x) = \alpha 0 - \alpha x = 0 - \alpha x = -\alpha x$.

2.3.1 Dependencia e independencia lineal

Los siguientes conceptos son fundamentales para el estudio de los espacios vectoriales, ya que la idea de *independencia lineal* nos llevará a las definiciones de *base*, *rango*, *dimensión*, etc., de capital importancia para dicho estudio. A partir de estos conceptos podremos profundizar en el análisis de estas estructuras algebraicas, encontrando formas alternativas de representación y caracterizando los posibles subconjuntos del espacio vectorial que conservan las mismas propiedades.

En lo sucesivo consideraremos un espacio vectorial real cualquiera, $[V, +, \cdot])$.

Definición 2.2 [Combinación lineal de vectores]

Dados los vectores $x_i \in V$ $1 \leq i \leq n$ y los escalares $\alpha_i \in \mathbf{R}$ $1 \leq i \leq n$, se denomina combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ a toda expresión del tipo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \text{ó en notación abreviada} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Se dice que $x \in V$ es una combinación lineal, o que depende linealmente, de los vectores $\{x_1, \dots,\ x_n\}$ de V si existen $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_n \in \mathbf{R}$ tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

En caso contrario diremos que x es linealmente independiente con los vectores $\{x_1, \dots,\ x_n\}$.

Definición 2.3 [Sistemas ligados y sistemas libres]

Un conjunto finito de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ siendo $H \subset V$ se dice que es linealmente dependiente o que forman un sistema ligado, si existen $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_k \in \mathbf{R}$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

Si de cualquier combinación lineal de ellos igualada a cero

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ se dice que es linealmente independiente o que forman un sistema libre.

En el caso particular del espacio vectorial $(\mathbf{R}^n,\ +,\ \cdot)$ esta definición es equivalente a decir que el sistema homogéneo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ es incompatible, es decir, sólo admite la solución trivial.

Por tanto, para comprobar si un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_n\} \subset \mathbf{R}^n$ es un sistema libre o ligado, se plantea el sistema de ecuaciones $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ y al resolver,

- si sólo admite la solución trivial $\iff$ sistema libre.
- si admite solución distinta de la trivial $\iff$ sistema ligado.

También se puede estudiar la dependencia o independencia lineal mediante escalonamiento o triangularización.

Teorema 2.1 *Un conjunto finito de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si, al menos, uno de ellos depende linealmente de los restantes.*

Demostración. Si $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ son linealmente dependientes existe x_i con $i = 1,\ 2, \ldots,\ k$ tal que $x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k$. En efecto:

Por ser linealmente dependientes existen $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_k \in \mathbf{R}$ no todos nulos tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$. Sea $\lambda_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq k$. Entonces

$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}x_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}x_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}x_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}x_k \implies$$

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k \implies$$

x_i es combinación lineal de los demás.

Recíprocamente, si algún x_i es combinación lineal de los demás, el conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ es un sistema ligado. En efecto:

Si x_i es combinación lineal de los demás, implica que

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k \implies$$

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} - 1 \cdot x_i + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \implies$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = 0$ con $\alpha_i = -1$ y por tanto $\{x_1, \ldots,\ x_k\}$ es un sistema ligado. ■

Definición 2.4 *Se dice que $H \subset V$ depende linealmente de $H' \subset V$ si cualquier vector de H depende linealmente de los vectores de H'.*

Propiedades de la dependencia lineal.

a) *Si un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k\}$ contiene al vector nulo, es un sistema ligado.*

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1 \cdot 0 + \cdots + 0x_k = 0 \quad \text{siendo} \quad 1 \neq 0.$$

b) *Si en un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2,\dots,\ x_k\}$ hay dos proporcionales entonces, es un sistema ligado.*

$x_i = kx_j \implies 0x_1+\cdots+0x_{i-1}+kx_j+0x_{i+1}+\cdots+(-k)x_j+\cdots+0x_k = 0$

con $k \neq 0$, por lo que $\{x_1,\ x_2,\dots,\ x_k\}$ es un sistema ligado.

c) $$\left.\begin{array}{l} H=\{x_1,\dots,x_r\} \text{ sistema ligado} \\ \\ H\subset H'=\{x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,\ x_k\} \end{array}\right\} \implies H' \text{ sistema ligado}$$

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_rx_r=0 \text{ con algún } \lambda_i\neq 0 \implies$$

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_rx_r+0x_{r+1}+\cdots+0x_k=0 \text{ con } \lambda_i\neq 0.$$

d) *Si un vector x es una combinación lineal de los vectores $\{x_1,\ x_2,\dots,\ x_m\}$ y cada uno de estos depende linealmente de $\{y_1,\ y_2,\dots,\ y_k\}$ entonces, x depende linealmente de $\{y_1,\ y_2,\dots,\ y_k\}$*

$$x=\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i=\sum_{i=1}^m \lambda_i\cdot\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}y_j=\sum_{j=1}^k(\sum_{i=1}^m \lambda_i\alpha_{ij})y_j=\sum_{j=1}^k \beta_j y_j$$

e) *Un conjunto formado por un único vector no nulo, es un sistema libre.*

$$x\neq 0 \text{ y } \alpha x=0 \implies \alpha=0 \implies \{x\} \text{ es un sistema libre.}$$

f) *Si $H=\{x_1,\ x_2,\dots,\ x_n\}$ es un sistema libre, cualquier subconjunto no vacío de H es también un sistema libre.*

Sea $\{x_1,\dots,\ x_r\}\subset\{x_1,\dots,\ x_n\}$.

Si $\{x_1,\dots,\ x_r\}$ fuese ligado entonces, $\{x_1,\dots,\ x_n\}$ sería ligado en contra de la hipótesis (ver el apartado c).

g) *Ningún sistema libre puede contener al vector nulo.*

Si contuviese al 0, sería un sistema ligado (ver el apartado a).

2.3.2 Espacios vectoriales de tipo finito

Definición 2.5 [Sistema generador]

Dado un espacio vectorial V se dice de que un conjunto finito $\{u_1,\ u_2,\dots,\ u_n\}$ de vectores de V es un sistema generador si

$$\forall\, x\in V \Rightarrow x=\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \quad \text{con} \quad \alpha_i\in \mathbf{K}$$

donde $\mathbf{K}$ representa al cuerpo de definición (generalmente $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$).

Un espacio vectorial V se dice de *tipo finito* si posee un sistema finito de *generadores*.

Evidentemente, el conjunto de generadores de un espacio vectorial no es único.

Existen numerosos espacios vectoriales que no están engendrados por un número finito de generadores, por ejemplo, el espacio vectorial de los polinomios, pues cualquier conjunto finito de polinomios $\{p_1(x),\ p_2(x), \ldots,\ p_n(x)\}$, cualesquiera que sean sus grados, generan a un subconjunto de $P[x]$ pero no a todo $P[x]$.

Otros espacios vectoriales están generados por un número finito de generadores, como por ejemplo $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{m\times n}$ ó $P_n[x]$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n en la variable x.

Definición 2.6 [Base de un espacio vectorial]

Un conjunto $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ se dice que constituye una base si es un sistema generador de V y además es libre.

Teorema 2.2 *Todo espacio vectorial V finito y no nulo posee, al menos, una base.*

Demostración. Por tratarse de un espacio vectorial de tipo finito, existe un sistema generador finito $H = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ tal que $V = \mathcal{L}(H)$ y como $V \neq \{0\}$ uno, al menos, de estos vectores generadores es no nulo, es decir, existen subconjuntos de H formados por vectores linealmente independientes.

Entre todos estos subconjuntos de H elegimos uno cuyo número de vectores sea máximo. Sea este $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r\}$ con $1 \leq r \leq n$ y veamos que constituye una base.

a) Es un sistema libre por construcción.

b) Veamos que es un sistema generador de V. En efecto: como el conjunto de vectores $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ es un sistema generador de V, cualquier vector $x \in V$ es combinación lineal de ellos.

   Como por otra parte, todos ellos son combinación lineal de los vectores $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r\}$, cualquier vector $x \in V$ puede ser expresado como combinación lineal de $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r\}$ (véanse las propiedades de la dependencia lineal), por lo que es un sistema generador de V.

Al ser $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\}$ un sistema generador de V y tratarse de un sistema libre, constituye una base de V. ■

Teorema 2.3 *Todas las bases de un espacio vectorial V poseen el mismo número de vectores.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_p\}$ dos bases de un mismo espacio vectorial V.

a) Supongamos que $n > p$

Por ser $\mathcal{B}'$ una base de V, existen $\alpha_{ij} \in \mathbf{K}$ tales que

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1p}v_p \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha_{n1}v_1 + \cdots + \alpha_{np}v_p \end{aligned}$$

Entonces, como $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \ \forall\, i = 1,\ 2, \dots,\ n$ por ser $\mathcal{B}$ un sistema libre se tiene que

$$\lambda_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1p}v_p) + \cdots + \lambda_n(\alpha_{n1}v_1 + \cdots + \alpha_{np}v_p) = 0 \Rightarrow$$

los coeficientes de $v_1,\ v_2, \dots,\ v_p$ han de ser nulos por ser $\mathcal{B}'$ otra base, y por tanto

$$\begin{aligned} \lambda_1\alpha_{11} + \cdots + \lambda_n\alpha_{n1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1\alpha_{1p} + \cdots + \lambda_n\alpha_{np} &= 0 \end{aligned}$$

Como $n > p$ el sistema homogéneo es compatible, por lo que admite solución $(\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_n)$ distinta de la trivial, lo que contradice el hecho de que $\lambda_i = 0 \ \ \forall\, i = 1,\ 2, \dots,\ n$.

Deducimos pues que $n \not> p$ o lo que es lo mismo, que $n \leq p$

b) Supongamos que $p > n$

Un razonamiento análogo al anterior nos conduce a que $p \not> n$ es decir, a que $n \geq p$

$$\left.\begin{array}{l} n \leq p \\ n \geq p \end{array}\right\} \Longrightarrow \ n = p$$ ■

El teorema anterior le da sentido a la siguiente definición:

Definición 2.7 [Dimensión de un espacio vectorial]

Se define dimensión de un espacio vectorial V de tipo finito y se denota por $\dim V$ *como el número de vectores que posee una base cualquiera del mismo.*

Definición 2.8 [Coordenadas de un vector]

Sean $\mathcal{B} = \{u_i, u_2, \dots, u_n\}$ una base de un espacio vectorial V y x un vector cualquiera del espacio.

Por ser $\mathcal{B}$ una base sabemos que existen escalares $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

A los escalares $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ se les denomina coordenadas o componentes del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$.

Cuando queramos especificar que se trata de las coordenadas respecto a una determinada base $\mathcal{B}$ lo expresaremos escribiendo $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)_{\mathcal{B}}$.

Teorema 2.4 *Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y consideremos una base $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ de dicho espacio.

$\forall\ x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ donde $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ son unas coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}$.

Supongamos que existieran otras coordenadas $(y_1,\ y_2, \dots,\ y_n)$ de x respecto de la misma base $\mathcal{B}$, es decir

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$$

Entonces, $x - x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) u_i = 0$ y al ser $\{u_i\}_{i=1,\ 2, \dots,\ n}$ un sistema libre, $x_i - y_i = 0\ \ \forall\, i$, por lo que $x_i = y_i\ \ i = 1,\ 2, \dots,\ n$.

Es decir, *las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas*. ■

Definición 2.9 [Base canónica]

De entre todas las bases del espacio vectorial $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ *hay una que recibe el nombre especial de base canónica y suele denotarse por*

$$\mathbf{C} = \{e_1,\ e_2, \dots,\ e_n\} \quad \text{siendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \end{array} \right.$$

La demostración de que realmente constituye una base es trivial, dada la sencillez en la estructura de sus elementos:

- Se trata de un sistema generador ya que cualquier vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puede obtenerse como

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

- Es un sistema libre de vectores pues de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_ie_i = 0$ (vector nulo) se deduce que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) \iff x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

Obsérvese que las coordenadas de un vector respecto de la base canónica coinciden con los n valores que componen el vector.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, $\dim V = n$, una vez elegida una base B para dicho espacio, podemos establecer una relación de uno a uno entre los vectores del espacio V y los del espacio $\mathbf{R}^n$. Es decir, podemos asociar (identificar) cada vector de V con un único elemento de $\mathbf{R}^n$ que representa sus coordenadas respecto de la base elegida.

Con esta idea, podemos prescindir de trabajar con los vectores originales (matrices, polinomios, funciones, etc.) y trabajar con sus coordenadas.

Teorema 2.5 *Fijada una base B en un espacio vectorial V de dimensión n, el conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ es un sistema libre si, y sólo si, lo es el conjunto de sus coordenadas como vectores de $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Sean $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, para $i = 1, \ldots, m$, las coordenadas del vector $x_i \in V$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_j) = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij}) v_j = 0$$

Dado que $\mathcal{B}$ es una base y por tanto un sistema libre, la expresión anterior es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x_{11} & + & \alpha_2 x_{21} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{m1} & = & 0 \\ \alpha_1 x_{12} & + & \alpha_2 x_{22} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{m2} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 x_{1n} & + & \alpha_2 x_{2n} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{mn} & = & 0 \end{array} \right.$$

que podemos expresar de la forma

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son linealmente independientes si, y sólo si, lo son los vectores de $\mathbf{R}^n$:

$$\{(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})\} \qquad \blacksquare$$

Definición 2.10 *Llamamos rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos linealmente independientes.*

> *¿Qué operaciones o modificaciones se pueden realizar en un conjunto de vectores de forma que no se altere la dependencia lineal, es decir, sin que se altere su rango?*

Proposición 2.6 *Si en un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m\}$ (que dispondremos en forma de matricial como una matriz cuyas columnas son los vectores x_i)*

$$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \iff \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

se aplican transformaciones elementales, su rango no se altera.

Demostración. Para transformaciones elementales columna tenemos:

- La transformación C_{ij} consiste simplemente en cambiar de orden dos vectores.
- La transformación $C_i(\alpha)$ (para $\alpha \neq 0$) consiste en reemplazar el vector x_i por un múltiplo de él, αx_i. Obviamente este reemplazamiento no cambia el número de vectores linealmente independientes que existe en el conjunto.
- Finalmente, la transformación $C_{ij}(\alpha)$ reemplaza el vector x_i por el nuevo vector $v = x_i + \alpha x_j$. Veamos que esto tampoco cambia el número de vectores linealmente independientes:
  - Si x_i es combinación lineal de los restantes vectores, $x_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k$, entonces resulta $v = x_i + \alpha x_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k + \alpha x_j$, de donde v también es combinación lineal de los restantes.
  - Si x_i es linealmente independiente de los demás, necesariamente v también pues en caso contrario, si $v = x_i + \alpha x_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k$, despejando x_i resulta $x_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k - \alpha x_j$ con lo que tendríamos que x_i es combinación de los demás, lo cual contradice nuestra hipótesis de que era independiente de los demás.

Para transformaciones elementales fila:

La dependencia o independencia lineal del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de vectores, equivale a la compatibilidad o incompatibilidad del sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado por $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x_{11} + \cdots + \alpha_m x_{m1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_1 x_{1n} + \cdots + \alpha_m x_{mn} = 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compatibilidad que no se ve alterada al realizar transformaciones elementales fila. ■

Ello nos lleva a que el rango de un conjunto de vectores se puede calcular escalonando la matriz A, cuyas columnas son los vectores x_i, mediante transformaciones filas o columnas.

Definición 2.11 [Rango fila y rango columna de una matriz]

Sea $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Se define rango fila de A y lo denotamos por $\operatorname{rg}_f A$ como el rango del conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ formado por las filas de la matriz A.

Análogamente, se define rango columna de A y se denota por $\operatorname{rg}_c A$ como el rango del conjunto de vectores de $\mathbf{R}^m$ formado por sus columnas.

Teorema 2.7 [Teorema del rango]

En toda matriz se verifica que los rangos fila y columna coinciden.

$$\operatorname{rg}_f A = \operatorname{rg}_c A$$

Demostración.

a) Sabemos (Proposición 2.6) que el rango no se altera si realizamos transformaciones filas o columnas.

b) Sabemos (Teorema 1.3)que mediante transformaciones elementales podemos reducir la matriz A a una de la forma

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rg}_f A = \operatorname{rg}_f D = r \\ \operatorname{rg}_c A = \operatorname{rg}_c D = r \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{rg}_f A = \operatorname{rg}_c A = r. \qquad \blacksquare$$

Podemos entonces hablar de *rango* de una matriz sin especificar si se trata del rango fila o del rango columna y lo representaremos por $\operatorname{rg} A$.

Por otra parte ha quedado demostrado que el rango de una matriz coincide con el número de pivotes en cualquier forma escalonada obtenida a partir de dicha matriz.

Corolario 2.8 *El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$$

Demostración.

$$\text{rg}\, A^T = \text{rg}_f\, A^T = \text{rg}_c\, A = \text{rg}\, A$$

Teorema 2.9 *Dadas las matrices $A \in \mathbf{R}^{m\times p}$ y $B \in \mathbf{R}^{p\times n}$ se cumple que*

$$\text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, A\, \text{rg}\, B$$

verificándose además que

$$\text{rg}\, AB \leq \textit{mín}\{\text{rg}\, A,\ \text{rg}\, B\}.$$

Demostración. Cualquier columna de la matriz $C = AB$ es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{p} a_{1i}b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{p} a_{mi}b_{in} \end{pmatrix}$$

Fijándonos ahora en la primera columna de $C = AB$ observamos que

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} \end{pmatrix} = b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{p1}\begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix}$$

es decir, las columnas de $C = AB$ son combinaciones lineales de las de A, por lo que

$$\text{rg}_c\, AB \leq \text{rg}_c\, A \iff \text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, A \tag{2.6}$$

Análogamente, fijándonos en la k-ésima fila de $C = AB$ observamos que

$$\begin{aligned} &(a_{k1}b_{11} + \cdots + a_{kp}b_{1n} \quad \cdots \quad a_{k1}b_{1n} + \cdots + a_{kp}b_{pn}) = \\ &\qquad = a_{k1}(b_{11} \ \cdots \ b_{1n}) + \cdots + a_{kp}(b_{p1} \ \cdots \ b_{pn}) \end{aligned}$$

es decir, es una combinación de las filas de B y por tanto,

$$\text{rg}_f\, AB \leq \text{rg}_f\, B \iff \text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, B \tag{2.7}$$

Fijándonos ahora en las ecuaciones (2.6) y (2.7) deducimos que

$$\text{rg}\, AB \leq \text{mín}\{\text{rg}\, A, \text{rg}\, B\}.$$

Además, observando que $\text{rg}\, AB \leq [\text{rg}\, AB]^2 = \text{rg}\, AB\, \text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, A\, \text{rg}\, B$ podemos asegurar que

$$\text{rg}\, AB \leq \text{rg}\, A\, \text{rg}\, B \qquad \blacksquare$$

2.4 Variedades lineales

Definición 2.12 [Variedad lineal o Subespacio vectorial]

Sea $(V,\ +,\ \cdot)$ un espacio vectorial y $L \subset V$. Decimos que L es un subespacio vectorial o variedad lineal de V si L tiene estructura de espacio vectorial para las mismas operaciones de V y sobre el mismo cuerpo ($\mathbf{K}$).

Proposición 2.10

$$L \text{ subespacio vectorial de } V \iff \begin{cases} \forall\, x, y \in L \implies x + y \in L \\ \forall\, x \in L \ \text{ y } \ \forall\, \alpha \in \mathbf{K} \implies \alpha x \in L \end{cases}$$

Demostración.

- Si L es una variedad lineal de V es un espacio vectorial, por lo que

$$\forall\, x, y \in L \implies x + y \in L$$
$$\forall\, x \in L \ \text{ y } \ \forall\, \alpha \in \mathbf{K} \implies \alpha x \in L$$

- Recíprocamente, dado que la suma es interna en $L \subseteq V$ se verifican todas las propiedades de la suma y análogamente ocurre con las de la ley externa, por lo que L tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{K}$. ■

Estas dos condiciones podemos refundirlas en una sola:

Corolario 2.11 [Caracterización]

L es un subespacio vectorial de V si, y sólo si,

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x, y \in L \\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K} \end{array}\right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$

Ejemplo 2.5

a) $L = \{x = (x_1, x_2, 0) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

b) $L = \{x = (-\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$.

c) $L = \{x = (\alpha, 3\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$. □

Definición 2.13 [Variedad lineal engendrada por un conjunto de vectores]

Sean V un espacio vectorial real y $H \subset V$. Se denomina variedad lineal engendrada por H y la denotamos por $\mathcal{L}(H)$ al conjunto de vectores de V que son combinaciones lineales de los vectores de H.

El conjunto H es un sistema generador de $\mathcal{L}(H)$.

¿Es realmente $\mathcal{L}(H)$ una variedad lineal de V?

Teorema 2.12 *$\mathcal{L}(H)$ es una variedad lineal de V.*

Demostración. $x, y \in \mathcal{L}(H) \Longrightarrow$ existen $\begin{cases} x_1, \ldots, x_k, \ y_1, \ldots, y_p \in H \\ \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbf{R} \end{cases}$

tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \qquad y = \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j$$

de donde

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \beta \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j = \sum_{i=1}^{k} (\alpha \alpha_i) x_i + \sum_{j=1}^{p} (\beta \beta_j) y_j,$$

es decir, $\alpha x + \beta y$ es combinación lineal de $x_1, \ldots, x_k, \ y_1, \ldots, y_p \in H$, por lo que $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}(H)$ y por tanto, $\mathcal{L}(H)$ es una variedad lineal de V. ■

Propiedades

Sea $V \in \mathbf{R}^n$ un espacio vectorial y sean $H, \ H' \subset V$. Se cumplen:

- $H \subseteq \mathcal{L}(H)$.

$$\forall \, x \in H \quad \text{como} \quad 1 \in \mathbf{R} \Longrightarrow 1 \cdot x = x \in \mathcal{L}(H) \Longrightarrow H \subseteq \mathcal{L}(H)$$

- $H \subset H' \Longrightarrow \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(H')$.

$$\forall \, x \in \mathcal{L}(H) \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad x_i \in H \subset H' \Longrightarrow$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad x_i \in H' \Longrightarrow x \in \mathcal{L}(H') \Longrightarrow \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(H')$$

- $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H)$.

  De las dos propiedades anteriores deducimos que

$$H \subseteq \mathcal{L}(H) \implies \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$$

  Veamos ahora que $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \subseteq \mathcal{L}(H)$.

$$\forall\, x \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \implies x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad x_i \in \mathcal{L}(H)$$

$$x_i \in \mathcal{L}(H) \implies x_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} x_j \quad \text{con} \quad x_j \in H$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{p} (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j x_j \quad \text{con} \quad x_j \in H$$

  es decir, $x \in \mathcal{L}(H) \implies \mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \subseteq \mathcal{L}(H)$ y por tanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H).$$

2.4.1 Operaciones con variedades lineales

Intersección

Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de V.

$$L = L_1 \cap L_2 \textit{ es otra variedad lineal de } V$$

que recibe el nombre de *subespacio intersección*.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x, y \in L \\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} x, y \in L_1 \implies \lambda x + \mu y \in L_1 \\ x, y \in L_2 \implies \lambda x + \mu y \in L_2 \end{array}\right\} \implies \lambda x + \mu y \in L_1 \cap L_2$$

Por tanto, $L_1 \cap L_2$ es una variedad lineal de V.

Podemos generalizar diciendo: si $L_i \;\; 2 \leq i \leq n$ es un conjunto de i variedades lineales de V entonces, $L = \bigcap_{i=2}^{n} L_i$ es también una variedad lineal de V.

Este resultado es fácil probarlo utilizando para ello el método de inducción.

La unión de dos variedades lineales *no es, en general, otra variedad lineal*.

En efecto: sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

$$\forall\, x, y \in L_1 \cup L_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in L_1 \quad \text{o} \quad x \in L_2 \\ y \in L_1 \quad \text{o} \quad y \in L_2 \end{cases}$$

Supongamos $x \in L_1$ e $y \in L_2$ ($y \notin L_1$, $x \notin L_2$). Entonces, $x + y \notin L_1$ y $x + y \notin L_2$ por lo que $x + y \notin L_1 \cup L_2$ y por tanto, $L_1 \cup L_2$ no es una variedad lineal.

Suma

Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V definido sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$.

Se define el conjunto suma de L_1 y L_2 como

$$L = L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \;:\; x_1 \in L_1 \;\; \text{y} \;\; x_2 \in L_2\}$$

$$L = L_1 + L_2 \text{ \emph{es otra variedad lineal de} } V$$

que recibe el nombre de *subespacio suma*.

En efecto:

$$\forall\, x, y \in L = L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \quad \text{con} \quad x_1 \in L_1 \quad x_2 \in L_2 \\ y = y_1 + y_2 \quad \text{con} \quad y_1 \in L_1 \quad y_2 \in L_2 \end{cases}$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$ es $\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$

Como $\begin{cases} x_1,\; y_1 \in L_1 \Rightarrow \lambda x_1 + \mu y_1 \in L_1 \\ x_2,\; y_2 \in L_2 \Rightarrow \lambda x_2 + \mu y_2 n L_2 \end{cases}$

Por lo que $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2 = L$

Es decir, $L = L_1 + L_2$ es una variedad lineal de V.

Propiedades

- *Toda variedad L que contenga a L_1 y a L_2, también contiene a $L_1 + L_2$ y viceversa.*

Sea L una variedad que contenga a L_1 y a L_2.

$$\forall\, z \in L_1 + L_2 \implies z = x + y \begin{cases} x \in L_1 \implies x \in L \\ y \in L_2 \implies y \in L \end{cases}$$

y como L es una variedad lineal

$$x, y \in L \implies z = x + y \in L \implies L_1 + L_2 \subseteq L$$

Recíprocamente si $L_1 + L_2 \subseteq L$

$\forall\, x \in L_1 \implies x = x + 0$ con $x \in L_1$ $0 \in L_2 \implies L_1 \subseteq L_1 + L_2 \subseteq L$

$\forall\, y \in L_2 \implies y = 0 + y$ con $0 \in L_1$ $y \in L_2 \implies L_2 \subseteq L_1 + L_2 \subseteq L$

- *$L_1 + L_2$ es la variedad lineal más pequeña que contiene a las variedades L_1 y L_2.*

  Sea $L = L_1 + L_2$ y sea L' una variedad lineal de V tal que $L_1,\ L_2 \subseteq L'$. Veamos entonces que $L \subseteq L'$.

  $\forall\, x \in L \implies x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2 \implies x_1 \in L',\ x_2 \in L'$ y por ser L' una variedad lineal $x_1 + x_2 \in L' \implies x \in L' \implies L \subseteq L'$.

Suma directa

Si dos variedades lineales L_1 y L_2 de un espacio vectorial V son disjuntas, es decir, si $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ su suma se denomina *suma directa* y se denota por $L_1 \oplus L_2$

Teorema 2.13 *Si la suma de dos variedades es directa, cualquier vector de dicha suma se puede expresar de manera única como suma de un vector de cada una de las variedades. Es decir: $\forall\, x \in L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow$ existen unos únicos vectores $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$ tales que $x = x_1 + x_2$.*

Recíprocamente si la descomposición es única, la suma es directa.

Demostración. Supongamos que $x \in L_1 \oplus L_2$ admitiese dos descomposiciones

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \ :\ x_1 \in L_1 \ x_2 \in L_2 \\ x = y_1 + y_2 \ :\ y_1 \in L_1 \ y_2 \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Como $x_1 - y_1 \in L_1$ y $x_2 - y_2 \in L_2$, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \in L_1 \cap L_2 = \{0\} \Rightarrow$ $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$
y por tanto, la descomposición es única.

Recíprocamente si la descomposición es única, como

$$\forall\, x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow x = x + 0 = 0 + x \Rightarrow \begin{cases} x = x + 0 \quad \text{con} \quad x \in L_1 \;\; 0 \in L_2 \\ x = 0 + x \quad \text{con} \quad 0 \in L_1 \;\; x \in L_2 \end{cases}$$

y al ser única la descomposición $x = 0 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$, por lo que la suma es directa. ∎

2.4.2 Ecuaciones de los subespacios.

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V, L un subespacio de V de dimensión $r < n$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base de L.

Definición 2.14 [Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal]

Se denominan ecuaciones paramétricas de una variedad L a las relaciones que ligan las coordenadas de un vector cualquiera $x \in L$ respecto de las bases $\mathcal{B}'$ de L y $\mathcal{B}$ de V.

$$\forall\, x \in L \implies x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \qquad \forall\, x \in L \subseteq V \implies x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

$$u_1,\ u_2, \dots,\ u_r \in V \implies u_i = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ni}v_n \quad i = 1,\ 2, \dots,\ r$$

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \implies$$

$$\lambda_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + \lambda_r(a_{1r}v_1 + \cdots + a_{nr}v_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \implies$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{1r})v_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_r a_{nr})v_n = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

y al ser únicas las coordenadas de un vector respecto de una base, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{1r} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_r a_{nr} \end{array}\right\} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } L.$$

Se trata pues, de un sistema de n ecuaciones con r incógnitas siendo $r < n$.

Definición 2.15 [Ecuaciones implícitas de una variedad]

Si en el sistema anterior eliminamos los parámetros $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_r$, se obtienen las denominadas ecuaciones implícitas de la variedad lineal L.

Visto de otra forma, un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece a la variedad L si, y sólo si, el sistema anterior es compatible determinado en los parámetros $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Por tanto, si escalonamos la matriz ampliada del sistema, no debe haber pivotes en la última columna. Al igualar a cero esos pivotes obtenemos las ecuaciones implícitas de L.

Ejemplo 2.6 Para hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la variedad L de $\mathbf{R}^5$ engendrada por los vectores

$$(1,2,1,0,0),\ (0,-1,1,1,0),\ (1,0,-1,0,1),\ (1,1,2,1,0)$$

que expresaremos poniendo

$$L =< (1,2,1,0,0),\ (0,-1,1,1,0),\ (1,0,-1,0,1),\ (1,1,2,1,0) >$$

Determinamos, en primer lugar, una base de L.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ F_{13}(-1) \\ F_{41}(-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ F_{32}(-2) \\ F_{42}(-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto, una base de L es $\mathcal{B} = \{(1,2,1,0,0), (0,-1,1,1,0), (1,0,-1,0,1)\}$ y $\dim L = 3$. Debido a ello, cualquier vector $x \in L$ puede expresarse de la forma:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \lambda_1(1,2,1,0,0) + \lambda_2(0,-1,1,1,0) + \lambda_3(1,0,-1,0,1)$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_2 \\ x_5 = \lambda_3 \end{array}\right\} \text{ Ecuaciones paramétricas de } L.$$

Obsérvese que las ecuaciones paramétricas no son únicas, dependen de las bases elegidas. Por ejemplo, otra base de L está formada por las filas no nulas y finales de la matriz escalonada resultante:

$$\mathcal{B}' = \{(1,2,1,0,0),(0,-1,1,1,0),(0,0,-4,-2,1)\},$$

por lo que podemos elegir libremente la base que mejor nos convenga. Vamos a hallar ahora unas ecuaciones implícitas a partir de las anteriores ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_{21}(-2)\\F_{31}(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2-2x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_3-x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_{32}(1)\\F_{42}(1)}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & -3x_1+x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2x_1+x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2F_4+F_3\\4F_5+F_3}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & -3x_1+x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -7x_1+3x_2+x_3+2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1+x_2+x_3+4x_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -7x_1+3x_2+x_3+2x_4=0 \\ -3x_1+x_2+x_3+4x_5=0 \end{array} \right.$$

Estas dos últimas son unas ecuaciones implícitas de L. □

Analicemos una forma alternativa de resolver el ejercicio anterior. Puesto que el objetivo del primer escalonamiento en el ejercicio es sólo determinar vectores linealmente independientes en L, podemos ahorrar esfuerzos y pasar directamente al segundo escalonamiento para hallar simultáneamente las ecuaciones implícitas y una base de L. Basta tomar desde el principio todos los vectores generadores de L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_{21}(-2)\\F_{31}(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_{32}(1)\\F_{42}(1)}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \longrightarrow \\ 2F_4 + F_3 \\ 4F_5 + F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 \end{pmatrix}$$

Como puede observarse se han obtenido las mismas ecuaciones implícitas para L. Por otra parte, puesto que los pivotes del escalonamiento se encuentran en las tres primeras columnas de la matriz, una base de L está formada por los tres primeros vectores del sistema generador inicial. Esto nos llevaría a construir las mismas ecuaciones paramétricas que en la resolución anterior.

Ecuaciones del subespacio suma

Sean dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 de un mismo espacio vectorial V y supongamos que disponemos de una base para cada uno de los subespacios: $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ base de L_1 y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ base de L_2.

Queremos caracterizar el subespacio suma $L_1 + L_2$, proporcionando sus ecuaciones.

Sea $x \in L_1 + L_2 \implies x = x_1 + x_2$ con $x_i \in L_i$. De donde resulta que

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \; + \; \sum_{j=1}^{s} \beta_j v_j$$

es una combinación lineal de los vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$.

Tenemos por tanto un sistema generador de $L_1 + L_2$ sin más que unir las dos bases.

A partir de este sistema generador podemos eliminar vectores linealmente dependientes y obtener una base de $\mathcal{B}$ de $L_1 + L_2$.

Con esa base, ya sabemos cómo obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas que caracterizan al subespacio suma.

Ecuaciones del subespacio intersección

Sean dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 de un mismo espacio vectorial V. Supongamos que disponemos de unas ecuaciones implícitas para cada uno de los subespacios, referidas a una misma base del espacio V:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \ldots & a_{rn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \ldots & b_{1n}x_n & = & 0 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \ldots & b_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}x_1 & + & b_{s2}x_2 & + & \ldots & b_{sn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Queremos caracterizar el subespacio intersección $L_1 \cap L_2$, proporcionando sus ecuaciones.

Sea $x \in L_1 \cap L_2$. Como $x \in L_i,\ i = 1, 2$ entonces ha de verificar las ecuaciones implícitas de ambos subespacios. Tenemos entonces un nuevo sistema formado por la unión de los dos sistemas de ecuaciones anteriores. Si obtenemos, mediante escalonamiento, un sistema equivalente al anterior, las nuevas ecuaciones no nulas del sistema resultante constituyen unas ecuaciones implícitas del subespacio intersección $L_1 \cap L_2$. A partir de tales ecuaciones implícitas podemos obtener, resolviendo el sistema, una base del subespacio y con ésta, unas ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 2.7 Consideremos los subespacios vectoriales

$$L_1 = <(1,1,0,1),(0,1,1,0)> \quad \text{y} \quad L_2 = <(1,0,0,0),(0,1,0,1)>$$

Hallar bases, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de las variedades: L_1, L_2, $L_1 \cap L_2$ y $L_1 + L_2$.

Calculamos en primer lugar unas ecuaciones implícitas de L_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \\ F_{21}(-1) \\ \\ F_{41}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to \\ F_{32}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las ecuaciones implícitas de } L_1 \text{ son} \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Como los pivotes se encuentran sobre las dos primeras columnas, los dos vectores del sistema generador de L_1 son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de L_1. A partir de esta base obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } L_1 \text{ son} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 \end{array} \right.$$

De manera análoga, para L_2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \underset{F_{42}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las ecuaciones implícitas de } L_2 \text{ son} \left\{ \begin{array}{r} x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Como los pivotes se encuentran sobre las dos primeras columnas, los dos vectores del sistema generador de L_2 son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de L_2. A partir de esta base obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } L_2 \text{ son} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda_2 \end{array} \right.$$

El subespacio intersección, $L_1 \cap L_2$, viene determinado por las ecuaciones

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si escalonamos dicho sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{42}(-1)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{43}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$ son $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$

Resolviendo el sistema, tenemos $x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = x_4$.

Las ecuaciones paramétricas de $L_1 \cap L_2$ son $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \lambda \end{array} \right.$

Finalmente, un sistema generador de $L_1 + L_2$ está formado por la unión de las bases de L_1 y L_2. A partir de éste, obtenemos las ecuaciones implícitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-1) \\ F_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \underset{F_{32}(-1)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \underset{F_{43}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación implícita de $L_1 + L_2$ es: $x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

Como los pivotes se encuentran en las tres primeras columnas de la matriz, una base de $L_1 + L_2$ está formada por los tres primeros vectores del sistema generador: $\{(1, 1, 0, 1),\ (0, 1, 1, 0),\ (1, 0, 0, 0)\}$. Por lo que

$$\text{Las ecuaciones paramétricas de } L_1 + L_2 \text{ son } \begin{cases} x_1 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_1 \end{cases} \qquad \square$$

2.5 Propiedades de los espacios vectoriales de tipo finito.

Sea V un espacio vectorial de tipo finito con $\dim V = n$.

Teorema 2.14 *Todo subespacio propio H de V ($H \subset V$ siendo $H \neq V$) tiene dimensión menor que la de V.*

Demostración. $\dim H \leq \dim V$ ya que si V tiene dimensión n, no podemos encontrar $n + 1$ vectores linealmente independientes. Veamos entonces que si H es un subespacio propio de V es $\dim H \neq \dim V$.

H subespacio propio de $V \Rightarrow \exists\ x \in V\ :\ x \notin H$. Si $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ es una base de H, $H' = < u_1, u_2, \ldots, u_k, x >$ es otro subespacio de V con $\dim H' = k + 1$

$\dim V \geq \dim H' > \dim H \Rightarrow \dim V > \dim H$

Por tanto, la dimensión de H es estrictamente menor que la de V. ■

Teorema 2.15 [Ampliación de una base]

Dado un conjunto de vectores linealmente independientes

$$\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$$

siendo $k < n = \dim V$, se pueden encontrar $n - k$ vectores $u_{k+1},\ u_{k+2}, \ldots, u_n$ tales que el conjunto $\{u_1, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}, \ldots,\ u_n\}$ constituya una base de V.

Demostración. $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ genera un subespacio de V de dimensión $k < n$ $H_1 = < u_1, u_2, \ldots, u_k >$ es decir, H_1 es un subespacio propio de V por lo que existe, al menos, un vector $u_{k+1} \in V$ tal que $u_{k+1} \notin H_1$.

$\{u_1, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}\}$ es un sistema libre (ya que $u_{k+1} \not\in H$) que genera a la variedad $H_2 = < u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} >$, que es otro subespacio de V de dimensión $k+1$.

- Si $k+1 = n$ queda probado el Teorema.
- Si $k+1 < n$ H_2 es un subespacio propio de V por lo que existe otro vector $u_{k+2} \not\in H_2$ y hacemos un razonamiento análogo al anterior.

Este proceso podrá continuarse $n-k$ veces, por lo que podrán encontrarse los $n-k$ vectores indicados. ■

Teorema 2.16 *Si $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_p\}$ es un sistema libre, los subespacios H_1 y H_2 dados por $H_1 = < u_1, \ldots, u_r >$ y $H_2 = < v_1, \ldots, v_p >$ son disjuntos, es decir, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.*

Demostración. $x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in H_1 \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \\ x \in H_2 \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \beta_j v_j \end{cases}$

$0 = x - x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_j$ y como $\{u_1, \ldots,\ u_r,\ v_1, \ldots,\ v_p\}$ es un sistema libre, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{0\}$. ■

Teorema 2.17 *Si H_1 y H_2 son dos subespacios de V, se verifica que*

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Demostración. Sea $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r\}$ una base de $H_1 \cap H_2$ y ampliémosla hasta obtener una base $\mathcal{B}_1 = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ a_1, \ldots,\ a_{n-r}\}$ de H_1 y otra base de $\mathcal{B}_2 = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ b_1, \ldots,\ b_{m-r}\}$ de H_2.

Veamos que $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r,\ a_1, \ldots,\ a_{n-r},\ b_1, \ldots,\ b_{m-r}\}$ es una base de $H_1 + H_2$.

a) $\mathcal{B}$ es un sistema libre ya que

- $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}\}$ lo es por ser una base de H_1.

- Los vectores $b_1, \dots,\ b_{m-r}$ son linealmente independientes con los de $\mathcal{B}_1$ ya que de lo contrario, existiría algún b_i dependiente de ellos es decir, $b_i \in H_1$.

$$\left.\begin{array}{l} b_i \in H_1 \\ \\ b_i \in H_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ b_i \in L_1 \cap L_2$$

por lo que b_i sería combinación lineal de $u_1, \dots, u_r$ y

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, b_1, \dots, b_{m-r}\}$$

no sería un sistema libre, lo que contradice el hecho de ser una base de H_2.

b) $\mathcal{B}$ genera a $H_1 + H_2$ ya que

$$\forall\ x \in H_1 + H_2 \ \Longrightarrow\ x = u + v \ \text{ con } \ u \in H_1 \ \ v \in H_2 \ \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} a_1 + \cdots + \alpha_n a_{n-r} \\ v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \beta_{r+1} b_1 + \cdots + \beta_m b_{m-r} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$x = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) u_i + \sum_{i=r+1}^{n-r} \alpha_i a_i + \sum_{i=r+1}^{m-r} \beta_i b_i \ \Longrightarrow$$

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots,\ u_r,\ a_1, \dots,\ a_{n-r},\ b_1, \dots,\ b_{m-r}\} \ \text{ genera a } \ H_1 + H_2.$$

Al ser $\mathcal{B}$ un sistema libre y generador de $H_1 + H_2$, es una base, por lo que $\dim(H_1 + H_2) = r + (n - r) + (m - r) = n + m - r$ es decir

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.18 [Variedades complementarias]

Si H_1 y H_2 son dos subespacios complementarios de un espacio vectorial V, es decir tales que $H_1 + H_2 = V$ y $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, se verifica que

$$\dim V = \dim H_1 + \dim H_2$$

Demostración. $H_1 \cap H_2 = \{0\} \ \Longrightarrow\ \dim(H_1 \cap H_2) = 0$

$V = H_1 + H_2 \ \Longrightarrow\ \dim V = \dim(H_1 + H_2)$ por lo que

$$\dim V = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 \qquad \blacksquare$$

2.6 Cambio de bases

Sea V un espacio vectorial finito y consideremos dos bases cualesquiera $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_n\}$ del espacio V.

Se llaman *ecuaciones de cambio de bases* en V a las relaciones que ligan las coordenadas de un mismo vector $x \in V$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

$$\forall\, x \in V \Rightarrow \begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \Rightarrow (\lambda_1, \dots,\ \lambda_n)_{\mathcal{B}} & \text{coord. de } x \text{ respecto a } \mathcal{B} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Rightarrow (\mu_1, \dots,\ \mu_n)_{\mathcal{B}'} & \text{coord. de } x \text{ respecto a } \mathcal{B}' \end{cases}$$

Como $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_n\} \subset V$ podemos expresar cada uno de los vectores de $\mathcal{B}'$ en función de la base $\mathcal{B}$, es decir, $(a_{1j},\ a_{2j}, \dots,\ a_{nj})_{\mathcal{B}}$ serán las coordenadas de v_j respecto de la base $\mathcal{B}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j \right) u_i \implies$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j \qquad i = 1,\ 2, \dots,\ n$$

o en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}'}$$

donde $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz del cambio de bases, llamada también *matriz de paso*, $x_{\mathcal{B}}$ es el vector de coordenadas referido a la base $\mathcal{B}$ y $x_{\mathcal{B}'}$ el vector de coordenadas referido a la base $\mathcal{B}'$. Obsérvese que las columnas de la matriz $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ están formadas por las coordenadas de cada vector de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Veamos dos propiedades interesantes de las matrices de paso:

- *$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es una matriz regular* ya que sus columnas son las coordenadas de los vectores de una base y éstos son linealmente independientes.

- $(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}'} \implies x_{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} x_{\mathcal{B}} \text{ por ser matriz regular} \\ x_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} x_{\mathcal{B}} \text{ ecuación del cambio de } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}' \end{array}\right\} \implies$$

$$(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Ejemplo 2.8 Considérense las bases de $\mathbf{R}^4$

$$\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\} \text{ y } \mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$$

donde $v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 - u_3$, $v_3 = u_2 + u_4$, $v_4 = u_2 + u_3$.

Dado que

$$\begin{array}{lcl} v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3 & \implies & v_1 = (1, -2, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_2 = u_1 - u_3 & \implies & v_2 = (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_3 = u_2 + u_4 & \implies & v_3 = (0, 1, 0, 1)_{\mathcal{B}} \\ v_4 = u_2 + u_3 & \implies & v_4 = (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \end{array}$$

y la ecuación matricial del cambio de base $x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}'}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Si x tiene de coordenadas $(1, 2, 0, -1)_{\mathcal{B}}$, sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$ las calcularemos resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir, las coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}'$ son

$$x = (-1/2,\ 3/2,\ -1,\ 2)_{\mathcal{B}'}$$

Las coordenadas, respecto de la base $\mathcal{B}$ del vector x que respecto a la base $\mathcal{B}'$ tiene coordenadas $x = (0, 0, -1, 1)_{\mathcal{B}'}$ vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, las coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}$ son

$$x = (0, 0, 1, -1)_{\mathcal{B}} \qquad \square$$

2.7 Espacios fundamentales asociados a una matriz.

Generalmente los subespacios vectoriales pueden ser descritos de dos formas: dando un conjunto de vectores que generen a dicho subespacio, tal como sucede con el espacio columna (o el espacio fila) de una matriz, donde se especifican las columnas (o filas) o dando una lista de restricciones que debe cumplir el subespacio, es decir, en lugar de dar los vectores que lo generan, dar las propiedades que deben cumplir. Por ejemplo, el espacio nulo de una matriz A consta de todos los vectores que verifican $Ax = 0$ donde cada una de las ecuaciones de este sistema representa una restricción.

En el primer tipo de descripción puede haber filas o columnas combinaciones lineales de las demás y por ello, no sería necesario darlas para definir al subespacio. En la segunda, pueden existir restricciones a las que les ocurra lo mismo, es decir, que puedan evitarse por estar implícitamente exigidas en las demás. En ambos casos es difícil dar una base a simple vista, siendo necesario un procedimiento sistemático.

La idea consiste en dar una base para cada uno de los subespacios asociados a una matriz A a partir de una matriz escalonada U, obtenida por eliminación gaussiana.

2.7.1 Espacio columna de A. $[R(A)]$.

Definición 2.16 [Espacio columna de una matriz A]

Se denomina espacio columna de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y se denota por $R(A)$

al espacio generado por las columnas de dicha matriz.

$$R(A) \; = < a_1, a_2, \ldots, a_n >$$

donde a_i representan las columnas de la matriz A

Es frecuente denominarlo *recorrido de A* siendo consistente con la idea usual de recorrido de una función f como el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$. Si $f(x)$ está definida, x está en el dominio y $f(x)$ es el recorrido.

En nuestro caso, el dominio de la función $f(x) = Ax$ consta de todos los vectores $x \in \mathbf{R}^n$ y su recorrido, de todos los posibles valores Ax. En definitiva, los valores b para los que puede resolverse $Ax = b$.

El problema que pretendemos resolver es encontrar una base de $R(A)$ así como su dimensión.

Para calcular su dimensión podríamos escalonar la matriz A mediante transformaciones elementales fila (eliminación gaussiana) y contar el número de pivotes no nulos. Ahora bien, al realizar dichas transformaciones estamos sustituyendo coordenadas de los vectores columna por combinaciones lineales del resto de sus coordenadas, por lo que las columnas linealmente independientes de la matriz escalonada U no se corresponden con una base del espacio columna de A.

$$R(A) \neq R(U) \;\; \text{aunque} \;\; \dim R(A) = \dim R(U)$$

Sin embargo, las columnas de la matriz A correspondientes a las columnas de la matriz U en las que se encuentran los pivotes no nulos *constituyen una base* del espacio columna de A.

Ejemplo 2.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Dado que los pivotes no nulos de la matriz U se encuentran en la primera y la tercera columnas, dichas columnas de la matriz A constituyen una base de su espacio columna.

$$\mathcal{B}_{R(A)} = \{(1, 2, -1), (3, 9, 3)\} \quad \text{y} \quad \dim R(A) = 2$$

Obsérvese que el espacio columna de U está generado por los vectores

$$B_{R(U)} = \{(1,1,0),(3,3,0)\}$$

por lo que la tercera coordenada de cualquier vector de $R(U)$ es nula y por tanto

$$\left.\begin{array}{l}(1,2,-1) \in R(A)\\ (1,2,-1) \notin R(U)\end{array}\right\} \Longrightarrow R(A) \neq R(U) \qquad \square$$

2.7.2 Espacio fila de A: $[R(A^T)]$.

Definición 2.17 [ESPACIO FILA DE UNA MATRIZ A]

Se denomina espacio fila de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y se denota por $R(A^T)$ al espacio generado por las filas de dicha matriz.

$$R(A^T) = < f_1, f_2, \ldots, f_n >$$

donde f_i representan las filas de la matriz A

Al aplicar la eliminación gaussiana a una matriz A se produce una matriz escalonada U. El *espacio fila* de U o espacio generado por las filas de U, se obtiene directamente. Su dimensión es el número de filas linealmente independientes y las filas no nulas constituyen una base.

El espacio fila de A tiene la misma dimensión que el de U así como la misma base, pues las transformaciones elementales filas no alteran el espacio fila, ya que cada fila de U es una combinación lineal de las de A por lo que el nuevo espacio fila está contenido en el primitivo. Como cada paso puede anularse al mismo tiempo mediante una transformación elemental inversa, el espacio original está contenido en el nuevo espacio fila.

$$R(A) = R(U) \quad \text{y} \quad \dim R(A) = \dim R(U)$$

Ejemplo 2.10 El espacio fila de la matriz A del Ejemplo 2.9 tiene dimensión 2 y una base viene dada por

$$\mathcal{B}_{R(A^T)} = \{(1,3,3,2),(0,0,3,1)\} \qquad \square$$

Obsérvese que el espacio fila de una matriz A coincide con el espacio columna de A^T.

2.7.3 Espacio nulo de A: $N(A)$.

Definición 2.18 *Se denomina espacio nulo de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ a la variedad formada por todos los vectores $x \in \mathbf{R}^n$ tales que $Ax = 0$.*

Cuando hemos definido los espacios fila y columna de una matriz A hemos dicho que eran los espacios generados por las filas y las columnas de A respectivamente, es decir, son espacios vectoriales por definición.

No ocurre lo mismo cuando definimos el espacio nulo, ya de la definición nos lleva a preguntarnos

¿Constituyen un espacio vectorial los vectores de $\mathbf{R}^n$ tales que $Ax = 0$?

Sean $x, y \in N(A)$ es decir, dos vectores tales que $Ax = 0$ y $Ay = 0$.

Para cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, el vector $\lambda x + \mu y$ verifica que

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

es decir, $\lambda x + \mu y \in N(A)$ y, por tanto, $N(A)$ *es una variedad lineal de* $\mathbf{R}^n$.

El propósito original de la eliminación gaussiana es el de simplificar un sistema de ecuaciones lineales haciéndolo más manejable y sin alterar sus soluciones.

Dado el sistema $Ax = 0$ y mediante eliminación obtenemos $Ux = 0$ siendo el proceso reversible y por tanto,

$$N(A) = N(U)$$

De las m ecuaciones del sistema $Ax = 0$ sólo $r \leq m$ de ellas serán independientes y se corresponderán con las r-filas no nulas de U. Dichas ecuaciones constituyen las ecuaciones implícitas de $N(A)$, por lo que $\dim N(A) = n - r$.

El sistema $Ux = 0$ equivalente a $Ax = 0$ tendrá $n - r$ variables libres correspondientes a las $n - r$ columnas de U sin pivotes.

Dando alternativamente los valores 1 y 0 para cada una de las variables libres y resolviendo $Ux = 0$ para las restantes variables, mediante sustitución regresiva obtenemos los $(n - r)$-vectores que forman una base de $N(A)$.

Ejemplo 2.11 Para hallar una base del espacio nulo de la matriz del Ejemplo 2.9 habíamos visto que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Ux = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Las ecuaciones implícitas de } N(A) \text{ son } \left\{ \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

que, tomando a x_2 y a x_3 como variables libres, pueden ser escritas de la forma

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= -3x_3 \\ x_1 &= -3x_2 + 3x_3 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} \left. \begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow (-3, 1, 0, 0) \\ \left. \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_4 &= -3 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow (3, 0, 1, -3) \end{cases}$$

por lo que una base del espacio nulo de A es

$$\mathcal{B}_{N(A)} = \{(-3, 1, 0, 0), (3, 0, 1, -3)\}$$ □

2.8 Teorema de Rouche-Fröbenius

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$S \equiv \left\{ \begin{aligned} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \ \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \right. \Longrightarrow Ax = b$$

donde $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbf{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbf{R}^{m\times 1}$.

Se denomina *matriz ampliada* con los términos independientes y se denota por $(A|b)$ a la matriz

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Teorema 2.19 [Teorema de Rouche-Fröbenius]

a) *El sistema $Ax = b$ es compatible si, y sólo si,* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$.

  a.1) *Si $b = 0$ el conjunto de soluciones de $Ax = 0$ constituye un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$. El espacio nulo de A, $N(A)$.*

  a.2) *Si $b \neq 0$ el conjunto de soluciones, en caso de existir, es de la forma $x_1 + N(A)$ donde x_1 es una solución particular de $Ax = b$.*

b) *Si* $\operatorname{rg} A = r \implies \dim N(A) = n - r$.

Demostración.

a) Si $Ax = b$ tiene solución, equivale a que b es una combinación lineal de las columnas de A, es decir, al añadir a la matriz A la columna b, no se altera su rango y por tanto $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$.

  a.1) El espacio nulo ya henos visto que es una variedad lineal de $\mathbf{R}^n$.

  a.2) $Ax = b\ ,\ Ax_1 = b \implies A(x - x_1) = Ax - Ax_1 = b - b = 0 \implies x - x_1 \in N(A) \implies x \in x_1 + N(A)$.

b) $\operatorname{rg} A = r$ equivale a decir que el sistema $Ax = 0$ posee $n - r$ variables libres, es decir, que $\dim N(A) = n - r$. ■

Observaciones

- De a) se deduce que $Ax = b$ es incompatible si, y sólo si, $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg}(A|b)$
- De b) se deduce que
  - $\operatorname{rg} A = r = n \implies \dim N(A) = 0$ y por tanto el espacio nulo está formado sólo por la solución trivial.
    - ⋆ El sistema homogéneo $Ax = 0$ es incompatible.
    - ⋆ El sistema completo $Ax = b$ es compatible determinado (admite solución única).
  - $\operatorname{rg} A = r < n \implies \dim N(A) \neq 0$
    - ⋆ El sistema homogéneo $Ax = 0$ es compatible.
    - ⋆ El sistema completo $Ax = b$ es compatible indeterminado (admite infinitas soluciones).

2.9 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Encontrar m para que existan matrices cuadradas B y no nulas tales que $A \cdot B = 0$.

b) Probar que el conjunto de todas estas matrices B, es una variedad lineal de las matrices cuadradas de orden 2.

Solución:

a) Para que existan dicha matrices debe verificarse que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Ambos sistemas serán compatibles si

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow m = 6$$

e incompatibles si $m \neq 6$, por lo que sólo *existirán matrices B no nulas si $m = 6$*.

b) Sean B_1 y B_2 dos matrices cuadradas de orden dos tales que

$$AB_1 = AB_2 = 0$$

Para cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ se tiene que

$$A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda AB_1 + \mu B_2 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

por lo que $\lambda B_1 + \mu B_2$ es una matriz del mismo tipo y, por tanto, *dichas matrices constituyen una variedad lineal de las matrices cuadradas de orden 2*. ∎

Ejercicio 2.2 Se dice que una matriz $M \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ es mágica si las ocho sumas siguientes son iguales:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad (j = 1, 2, 3) \qquad \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ii} \qquad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

Designando por s el valor de estas sumas y por $M(s)$ a las matrices correspondientes:

a) Probar que las matrices mágicas de orden 3 (cualquiera que sea $s \in \mathbf{R}$) constituyen una variedad lineal de $\mathbf{R}^{3\times 3}$.

b) Construir todas las matrices mágicas antisimétricas, así como todas las simétricas.

SOLUCIÓN:

a) Basta observar que si A es una matriz mágica de suma s y B otra de suma t entonces $\alpha A + \beta B$ es una de suma $\alpha s + \beta t$, por ejemplo, para la suma
$$\sum_{i=1}^{3}(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{3} b_{ij} = \alpha s + \beta t$$
por lo que *las matrices mágicas de orden 3 constituyen una variedad lineal de las matrices cuadradas de orden 3*.

b) Si A es simétrica sólo debemos calcular los 6 elementos de su triangular superior (los otros 3 son simétricos de los que obtenidos).

Al ser las sumas de las filas las mismas que las sumas de las columnas por simetría, nos quedan 5 ecuaciones con 6 incógnitas que resolviendo el sistema nos dice que las matrices simétricas mágicas de suma s son las de la forma
$$\begin{pmatrix} {}^{2s}\!/_3 - \alpha & \alpha & {}^{s}\!/_3 \\ \alpha & {}^{s}\!/_3 & {}^{2s}\!/_3 - \alpha \\ {}^{s}\!/_3 & {}^{2s}\!/_3 - \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$
En el caso de las antisimétricas y dado que cualquier matriz antisimétrica tiene nulos los elementos de su diagonal principal se tiene que
$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$
es decir sólo existen matrices mágicas antisimétricas del tipo $M(0)$ que serán de la forma
$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$
■

Ejercicio 2.3 Sean u, v, y w tres vectores, linealmente independientes, de un espacio vectorial. Demostrar que los vectores $u+v$, $u-v$, y $u-2v+w$, también son linealmente independientes.

SOLUCIÓN: Para cualquier combinación lineal de ellos igualada a cero

$$\alpha(u+v)+\beta(u-v)+\gamma(u-2v+w)=0$$

obtenemos

$$(\alpha+\beta+\gamma)u+(\alpha-\beta-2\gamma)v+\gamma w=0$$

y por ser u, v y w linealmente independientes se tiene que

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\ \ \gamma&=0\\ \alpha-\beta-2\gamma&=0\\ \gamma&=0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

por lo que *los vectores $u+v$, $u-v$ y $u-2v+w$ también son linealmente independientes*. ■

Ejercicio 2.4 Sea V un espacio vectorial, L un subespacio de V y $\{u_1,\dots,u_n\}$ un sistema generador de L formado por vectores linealmente independientes. Demostrar que si x es un vector de V que no pertenece a L, entonces $\{u_1,\dots,u_n,x\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Sol: Consideremos una combinación lineal de ellos igualada a cero.

$$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n+\mu x=0$$

μ necesariamente es cero, ya que de lo contrario sería

$$x=-\frac{\lambda_1}{\mu}u_1-\cdots-\frac{\lambda_n}{\mu}u_n\in L$$

en contra de la hipótesis de que $x\notin L$.

Al ser $\mu=0$ nos queda que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0$ y por ser $\{u_1,\dots,u_n\}$ linealmente independientes se deduce que

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

Es decir

$$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n+\mu x=0 \Longrightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=\mu=0$$

por lo que

$$\{u_1,\dots,u_n,x\} \qquad \textit{son linealmente independientes.}$$

■

Ejercicio 2.5 Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del $\mathbf{R}$-espacio vectorial V. Se consideran los conjuntos $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B'' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, donde:

$$v_1 = (0, 1, 0, 3),\ v_2 = (-1, 1, 0, 0),\ v_3 = (-2, 0, -1, 2),\ v_4 = (-1, -1, -1, 1)$$

$$w_1 = (2, -2, 0, 1),\ w_2 = (1, 1, 1, 0),\ w_3 = (3, 0, 1, -1),\ w_4 = (0, -2, -1, 1)$$

respecto de la base B. Se pide:

a) Probar que B y B' son bases de V.

b) Hallar la matriz del cambio de base de B' a B''.

c) Determinar las coordenadas respecto de B' del vector x cuyas coordenadas respecto de B'' son $(2, 1, 0, -1)$.

Solución: Consideremos las matrices B_1 y B_2 que tienen, por columnas, los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ respectivamente

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Escalando la matriz B_1 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rg} B_2 = 4$$

por lo que *los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ constituyen una base de V*.

Análogamente, para B_2 se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $\operatorname{rg} B_2 = 4$ y, por tanto, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *constituyen otra base de* V.

b) Sea $P_{B'B''}$ la matriz del cambio de base de la base B' a la B''.

$$B_1 x_{B'} = B_2 x_{B''} \implies x_{B''} = B_2^{-1} B_1 x_{B'} = P_{B'B''} x_{B'} \implies$$

$$P_{B'B''} = B_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -3 & -1 \\ 9 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Sea $x_{B'}$ el vector referido a la base B' dado que

$$P_{B'B''} x_{B'} = x_{B''} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies x_{B'} = P^{-1}_{B'B''} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

■

Ejercicio 2.6 Sea $B = \{u, v, w\}$ una base del espacio vectorial V. Sean $u' = 2u - v + w$, $v' = u + w$ y $w' = 3u - v + 3w$.

a) Probar que $B' = \{u', v', w'\}$ es una base de V.

b) Establecer las ecuaciones del cambio de base de B a B'.

c) Hallar las coordenadas respecto de B del vector $z = -2u' + 3v' + w'$.

SOLUCIÓN:

a) Para cualquier combinación lineal de los vectores $\{u', v', w'\}$ igualada a cero

$$\alpha u' + \beta v' + \gamma w' = 0 \implies \alpha(2u - v + w) + \beta(u + w) + \gamma(3u - v + 3w) = 0 \implies$$

$$(2\alpha + \beta + 3\gamma)u + (-\alpha - \gamma)v + (\alpha + \beta + 3\gamma)w = 0$$

Dado que $\{u, v, w\}$ son linealmente independientes, se tiene que

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha \qquad - \quad \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{array}\right\} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

por lo que *$\{u', v', w'\}$ son linealmente independientes y, por tanto, constituyen una base de V*.

b) Llamando $B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a la matriz que tiene por columnas los vectores de B' respecto de la base B se tiene que

$$Bx_B = B'x_{B'} \implies x_{B'} = B'^{-1}Bx_B$$

y teniendo en cuenta que $B = I$ por tratarse de una base referida a ella misma (base canónica) se tiene que

$$P_{BB'} = B'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$x_{B'} = P_{BB'} x_B$$

c) Dado que z tiene, respecto a la base B' coordenadas $(-2, 3, 1)$ se obtiene que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{BB'} z_B \implies$$

$$z_B = P_{BB'}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 2.7 En $\mathbf{R}^4$ se consideran los vectores,

$$u_1 = (1, -2, 1, 3),\ u_2 = (2, -4, 0, 2),\ u_3 = (3, -6, 1, 5),\ u_4 = (2, -4, -4, -6)$$

Se pide:

a) Ecuaciones implícitas de $L = < u_1, u_2, u_3, u_4 >$.

b) Dimensión y base de L.

c) Coordenadas de los vectores dados respecto de la base formada.

d) Ampliar la base de L a una de $\mathbf{R}^4$.

SOLUCIÓN:

a) $x \in L \implies x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 \implies$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Escalonando la matriz ampliada obtenemos

$$\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ -2 & -4 & -6 & -4 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & -6 & x_4 \end{array} \to \begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & x_3 - x_1 \\ 0 & -4 & -4 & -12 & x_4 - 3x_1 \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (x_4 - 3x_1) - 2(x_3 - x_1) \end{array}$$

por lo que las ecuaciones implícitas de L son

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + 2x_1 = 0 \\ (x_4 - 3x_1) - 2(x_3 - x_1) = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

b) Al tratarse de una variedad de $\mathbf{R}^4$ con dos ecuaciones implícitas,

$$\dim L = \dim \mathbf{R}^4 - \text{número de ecuacioes implícitas} = 4 - 2 = 2$$

Una base de L puede ser, por ejemplo, $\mathcal{B}_L = \{u_1, u_2\}$ que son linealmente independientes.

c) Respecto de la base $\mathcal{B}_L = \{u_1, u_2\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,0) \\ u_2 &= (0,1) \\ u_3 &= u_1 + u_2 = (1,1) \\ u_4 &= -4u_1 + 3u_2 = (-4,3) \end{aligned}$$

d) Teniendo en cuenta que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

una base ampliada es $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, u_1, u_2\}$. ∎

Ejercicio 2.8 Construir en $\mathbf{R}^5$, un subespacio suplementario del subespacio:

$$L : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & & & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN: Busquemos, en primer lugar, las ecuaciones paramétricas de la variedad. Obsérvese que en las ecuaciones implícitas no aparece la coordenada x_3, por lo que $x_3 = \mu$.

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5/2 \end{array}$$

de donde

$$x_5 = t \quad x_4 = -\frac{5}{2}t \quad x_2 = -\frac{3}{2}t \quad x_1 = t$$

o bien, haciendo $t = 2\lambda$, las ecuaciones paramétricas de L son

$$x_1 = 2\lambda \qquad x_2 = -3\lambda \qquad x_3 = \mu \qquad x_4 = -5\lambda \qquad x_5 = 2\lambda$$

$$\lambda = 0, \mu = 1 \implies (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 0)$$

$$\lambda = 1, \mu = 0 \implies (2, -3, \quad 0, -5, \quad 2)$$

Una base de L es, por tanto, $\mathcal{B}_L = \{(0,0,1,0,0),(2,-3,0,-5,2)\}$.

Dado que

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{array}\right| = -5 \neq 0$$

los vectores e_1, e_2 y e_5 amplian la base $\mathcal{B}_L$ a una de $\mathbf{R}^5$, por lo que la variedad L' suplementaria de L es la variedad generada por ellos tres,

$$L' = < e_1, e_2, e_5 >$$

■

Ejercicio 2.9 Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial de dimensión 5 y sea B una base de V

$$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

Se consideran los subespacios:

$$F : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

respecto de B, y

$$G = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$$

donde los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ y v_4 vienen dados por:

$$\begin{array}{ll} v_1 = (1,0,0,-1,0)_B \qquad & v_2 = (0,-1,-1,4,-1)_B \\ v_3 = (1,1,0,-4,0)_B & v_4 = (3,-2,4,-1,4)_B \end{array}$$

Determinar la dimensión, una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de F, G, $F \cap G$ y $F + G$, respecto de la base B.

SOLUCIÓN:

a) ***F***

Al ser independientes sus ecuaciones implícitas tenemos que

$$\dim F = \dim \mathbf{R}^5 - \text{ número de ecuaciones implícitas} = 5 - 2 = 3$$

Haciendo $x_3 = 2\alpha$, $x_4 = \beta$ y $x_5 = 2\gamma$ se tiene que

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= -2\alpha + \beta \\ 2x_2 &= -2\alpha - 2\beta + 2\gamma \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -\alpha + 2\beta - \gamma \\ x_2 &= -\alpha - \beta + \gamma \end{aligned}\right.$$

por lo que las ecuaciones paramétricas de F son

$$x_1 = -\alpha + 2\beta - \gamma \quad x_2 = -\alpha - \beta + \gamma \quad x_3 = 2\alpha \quad x_4 = \beta \quad x_5 = 2\gamma$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \Longrightarrow (-1, -1, \ \ 2, \ \ 0, \ \ 0) \\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0 \Longrightarrow (\ \ 2, -1, \ \ 0, \ \ 1, \ \ 0) \\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1 \Longrightarrow (-1, \ \ 1, \ \ 0, \ \ 0, \ \ 2) \end{array}$$

Una base de F viene dada por

$$\mathcal{B}_F = \{(-1, -1, 2, 0, 0), (2, -1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 2)\}$$

b) ***G***

Como nos dan un sistema generador de G vamos a ver qué vectores son linealmente independientes.

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Longrightarrow$$

sólo los tres primeros vectores son linealmente independientes, por lo que una base de G es

$$\mathcal{B}_G = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{y} \quad \dim G = 3$$

De la expresión $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = \alpha + \gamma \quad x_2 = -\beta + \gamma \quad x_3 = -\beta \quad x_4 = -\alpha + 4\beta - 4\gamma \quad x_5 = -\beta$$

Escalonando el sistema formado por las ecuaciones paramétricas obtenemos:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 4 & -4 & x_4 \\ 0 & -1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 4 & -3 & x_4 + x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 + x_1 + 4x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_5 - x_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 - x_3 + x_2 \end{array}\right)$$

por lo que las ecuaciones implícitas de G son

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & & = 0 \\ x_3 & - x_5 & = 0 \end{array}\right.$$

c) $\boldsymbol{F \cap G}$

Los vectores de $F \cap G$ deben verificar las ecuaciones implícitas tanto de F como de G,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \phantom{{}- x_5} &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}- x_5} &= 0 \\ x_3 \phantom{{}+ 2x_4} - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que vamos a ver cuántas de ellas son independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow$$

sólo las tres primeras son independientes, obteniéndose que las ecuaciones implícitas de $F \cap G$ son

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + x_3 - \ x_4 \qquad &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_3 \qquad + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\dim(F \cap G) = \dim \mathbf{R}^5 -$ número de ecuaciones implícitas $= 5 - 3 = 2$

Llamando $x_4 = \alpha$ y $x_5 = \beta$ se obtiene que

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + x_3 &= \alpha \\ 2x_2 + x_3 &= -2\alpha + \beta \\ -x_3 = -\beta &= \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2\alpha - \beta \\ x_2 &= -\alpha \\ x_3 &= \beta \end{aligned}\right.$$

por lo que las ecuaciones paramétricas de $F \cap G$ son

$$x_1 = 2\alpha - \beta \quad x_2 = -\alpha \quad x_3 = \beta \quad x_4 = \alpha \quad x_5 = \beta$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1,\ \beta = 0 &\Longrightarrow (\ \ 2, -1, \ \ 0, \ \ 1, \ \ 0) \\ \alpha = 0,\ \beta = 1 &\Longrightarrow (-1, \ \ 0, \ \ 1, \ \ 0, \ \ 1) \end{aligned}$$

por lo que una base de $F \cap G$ es

$$\mathcal{B}_{F \cap G} = \{(2, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 1)\}$$

d) $\boldsymbol{F + G}$

Un sistema generador de $F + G$ está formado por la unión de las bases de F y G. Veamos, por tanto, cuántos vectores hay linealmente independientes para elegir una base.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{matrix} \quad \to$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es decir, una base de $F+G$ es

$$\mathcal{B}_{F+G} = \{(1,0,0,-1,0),(0,-1,-1,4,-1),(0,0,1,-1,0),(0,0,0,1,1)\}$$

y por tanto,

$$\dim(F+G) = 4$$

Teniendo en cuenta que cualquier vector de $F+G$ es combinación lineal de los vectores de la base, se tiene que las ecuaciones paramétricas de $F+G$ son

$$x_1 = \alpha \quad x_2 = -\beta \quad x_3 = -\beta+\gamma \quad x_4 = -\alpha+4\beta-\gamma+\mu \quad x_5 = -\beta+\mu$$

Eliminando ahora los parámetros

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x_3 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & x_4+x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & x_5 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3-x_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_4+x_1+4x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5-x_2 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 - x_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 - (x_4 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_2) \end{array}$$

de donde $x_5 - x_2 - (x_4 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_2) = 0$, es decir, la ecuación implícita de $F + G$ es

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

■

2.10 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.10 Resolver, utilizando el método de reducción de Gauss, el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 2t & + & 4u & = & 4 \\ -2x & - & 4y & - & z & - & 3t & - & 6u & = & -6 \\ 2x & + & 4y & & & + & t & + & 4u & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & z & + & 4t & + & 7u & = & 8 \end{array} \right.$$

Sol: $(x, y, z, t, u) = (2 - 2\lambda, \lambda, 2, 0, 0)$.

Ejercicio 2.11 Resolver, utilizando el método de reducción de Gauss, el siguiente sistema homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Sol: $(x, y, z, t) = \lambda(1, -1, 3, 2)$.

Ejercicio 2.12 Discutir, y resolver en su caso según los valores de a, los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 3x & + & 2y & = & 4 \\ 4x & + & y & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a \end{array}\right.$$

Sol:

1.- Compatible determinado si $a = 6$ con $(x, y) = (8/5, -2/5)$
Incompatible si $a \neq 6$.

2.- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ Compatible determinado $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$
Si $a = -1$ Compatible indeterminado $x = -1$, $y = z\lambda$.
Si $a = 1$ Compatible indeterminado $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

Ejercicio 2.13 Discutir, y resolver en su caso, según los valores de a y c, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & at & = & c \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 12 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$$

Sol:

Si $a \neq -1$ Comp. det. con $(x, y, z, t) = (2, \dfrac{-6a - c - 2}{1 + a}, 4, \dfrac{c - 4}{1 + a})$.

Si $a = -1$ y $c \neq 4$ Incompatible.

Si $a = -1$ y $c = 4$ Comp. Indet. con $(x, y, z, t) = (2, -6 - \lambda, 4, \lambda)$.

Ejercicio 2.14 Estudiar, según los valores de m, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & 18y & - & 2mz & = & 0 \\ 7x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & + & 10y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

Sol:

Si $m = 5$ Comp. indet. con $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda, 3\lambda)$.

Si $m \neq 5$ Incompatible.

Ejercicio 2.15 Estudiar, y resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & \lambda\, x \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & \lambda\, y \\ 2x & + & 4y & + & 8z & = & \lambda\, z \end{array}\right.$$

Sol:

Si $\lambda \neq 4$ y $\lambda \neq 6 \pm 3\sqrt{2}$ Incompatible.

Si $\lambda = 4$ Comp. det. con $(x, y, z) = (2\alpha, \alpha, -2\alpha)$.

Si $\lambda = 6 + 3\sqrt{2}$ Comp. det. con $(x, y, z) = (\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\alpha, (\sqrt{2}-1)\alpha, \alpha)$.

Si $\lambda = 6 - 3\sqrt{2}$ Comp. det. con $(x, y, z) = (\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\alpha, -(\sqrt{2}+1)\alpha, \alpha)$.

Ejercicio 2.16 De un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se sabe que admite las soluciones $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y que además uno de los coeficientes del sistema es no nulo. Hallar, en función de los parámetros que sean necesarios, todas las soluciones del sistema.

Sol: $(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$.

Ejercicio 2.17 Factorizar A en LU y escribir el sistema triangular superior $Ux = c$ que aparece después de la eliminación, resolviéndolo, para:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sol: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ux = c \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ de solución $(1, -1, 1)$.

Ejercicio 2.18 En $\mathbf{R}^3$ se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & (\alpha+8)y & & & = & 3\alpha - 6 \\ \alpha x & - & 2\alpha y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 8y & - & z & = & 2\alpha - 4 \end{array}\right.$$

Discutirlo y resolverlo según los valores del parámetro α.

Sol:

Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq -24$ Comp. det. con $(x, y, z) = \dfrac{\alpha - 2}{\alpha + 24}(12, 3, -2\alpha)$.

Si $\alpha = 2$ Comp. indet. con $(x, y, z) = (-5\lambda, 2\lambda, 6\lambda)$.

Si $\alpha = -24$ Incompatible.

Ejercicio 2.19 Dados los vectores $v_1 = (-1, 0, 4, 1)$, $v_2 = (3, -2, 0, 2)$ y $v_3 = (2, a, -2, 0)$ de $\mathbf{R}^4$, determinar qué condición ha de verificar a para que $v = (2, -3, -2, 3)$ sea combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Sol: $a = -3/5$.

Ejercicio 2.20 Determinar si los vectores del espacio vectorial $\mathbf{R}^4$:

$$v_1 = (0, 1, -2, 1),\ v_2 = (-1, 7, 2, -4),\ v_3 = (1, 3, 2, -1) \text{ y } v_4 = (1, 0, 0, 1)$$

son linealmente independientes. En caso de no serlo, encontrar la relación de dependencia.

Sol: $v_4 = 1/3(v_1 - v_2 + 2v_3)$.

Ejercicio 2.21 Estudiar, según los valores de m y n, la dependencia, o independencia, lineal de los siguientes vectores:

a) $u = (1, 1, 0, m)$, $v = (3, -1, n, -1)$ y $w = (-3, 5, m, -4)$

b) $(1, -2, 1, 0)$, $(1, -3, -2, 2)$, $(0, -2, 1, -5)$, $(2, 0, 7, 1)$ y $(4, -5, 6, m)$

Sol:

a) Son linealmente dependientes si $m = -2$ y $n = 1$.

b) El cuarto vector de combinación lineal de los tres primeros y el último también lo es para $m = 3$ siendo independiente de los tres primeros si $m \neq 3$.

Ejercicio 2.22 Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V.
Demostrar que el conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$, donde $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 - u_2$, $v_3 = u_1 - u_2 - u_3, \ldots, v_n = u_1 - u_2 - \cdots - u_n$, es linealmente independiente.

Sol: Véase el Ejercicio 2.3

Ejercicio 2.23 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C = 2$.

Ejercicio 2.24 Sea $A = \{(0, x, y) : \ x, y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$. Se pide:

a) Demostrar que A es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

b) Probar que si $B = \{(0,1,0), (0,1,1)\}$ y $C = \{(0,1,1), (0,1,2), (0,2,1)\}$ entonces $A = \mathcal{L}\,(B) = \mathcal{L}\,(C)$.

Sol: Para ver que A es una variedad lineal de $\mathbf{R}^3$ basta ver que cualquier combinación lineal de vectores de A también pertenece a A. Para probar que $A = \mathcal{L}\,(B) = \mathcal{L}\,(C)$ basta ver que las tres son variedades de dimensión 2 generadas por los vectores e_2 y e_3 de la base canónica de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 2.25 En $\mathbf{R}^3$ se consideran los conjuntos:

$$A = \{(1,0,1)\}, \ B = \{(1,0,0), (0,1,1)\} \text{ y } C = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$$

Sean $U = \mathcal{L}\,(A), \ V = \mathcal{L}\,(B)$ y $W = \mathcal{L}\,(C)$. Se pide:

a) Estudiar si U y V son subespacios suplementarios. Análogamente, para V y W.

b) Expresar, si es posible, $(2,1,2)$ como suma de un vector de U y otro de V. ¿La descomposición es única?

c) Expresar, si es posible, $(3,0,3)$ como suma de un vector de V y otro de W. ¿La descomposición es única?

Sol: U y V son suplementarias, V y W no lo son, por lo que la descomposición pedida del vector $(2,1,2)$ es única mientras que la del vector $(3,0,3)$ no lo es.

Ejercicio 2.26 Sea $P_n[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales.

a) Demostrar que $P_n[x]$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

b) Demostrar que $\{1,\ x,\ x^2\}$ es una base de $P_2[x]$. Generalizar a una base de $P_n[x]$.

Ejercicio 2.27 En $\mathbf{R}^4$ se consideran los vectores $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, siendo:

$$u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (2,3,4,1),\ u_3 = (3,4,1,2) \text{ y } u_4 = (4,1,2,3)$$

Probar que forman una base de $\mathbf{R}^4$ y hallar, respecto de ella, las coordenadas de $v = (1,1,1,1)$.

Sol: El determinante formado por las coordenadas de los cuatro vectores es no nulo, por lo que forman una base de $\mathbf{R}^4$. Las coordenadas de v respecto a dicha base son $(1/10,\ 1/10,\ 1/10,\ 1/10)$.

Ejercicio 2.28 Probar que el conjunto de las matrices de orden $m \times n$, con elementos reales, es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial. Determinar una base y la dimensión de dicho espacio vectorial.

Sol: Una base es el conjunto de las matrices $m \times n$ que tienen un único elemento igual a 1 y el resto de sus elementos ceros. Dado que existen $m \cdot n$ posiciones para asignar el valor 1, la dimensión es $m \cdot n$.

Ejercicio 2.29 Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial y $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de V. Para cada uno de los subespacios engendrados por los vectores que se expresan calcular, la dimensión, una base contenida en el sistema de generadores dado y la expresión de los restantes vectores respecto de la base.

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} v_1 & = & 2e_1 & - & 3e_2 & + & e_3 & & \\ v_2 & = & 6e_1 & - & 5e_2 & & & + & 2e_4 \\ v_3 & = & 2e_1 & + & e_2 & - & 2e_3 & + & 2e_4 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} u_1 & = & e_1 & - & e_2 & + & e_3 & - & e_4 \\ u_2 & = & e_1 & + & e_2 & + & e_3 & + & e_4 \\ u_3 & = & & - & e_2 & + & e_3 & + & e_4 \\ u_4 & = & e_1 & + & e_2 & + & & & e_4 \end{array} \right.$$

Sol: $\left\{ \begin{array}{l} \dim L_1 = 2,\ \mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\} \ \text{ y } \ v_3 = v_2 - 2v_1 \\ \dim L_2 = 4,\ \mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \end{array} \right.$

Ejercicio 2.30 Determinar en $\mathbf{R}^3$ un subespacio suplementario de cada uno de los subespacios engendrados por los siguientes vectores:

a) $u = (-3, 1, 0)$

b) $u = (-1, 2, 1), \; v = (2, -4, 3)$

c) $u = (-1, 2, 1), \; v = (2, 1, -2), \; w = (1, 1, -1)$

Sol: a) $L =< e_2, e_3 >$ b) $L =< e_1 >$ c) $L =< e_1 >$.

Ejercicio 2.31 Dados los siguientes subespacios de $\mathbf{R}^4$ por sus ecuaciones paramétricas, obtener sus ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & \alpha & + & \beta & & \\ x_2 & = & & & \beta & + & \mu \\ x_3 & = & \alpha & & & + & \mu \\ x_4 & = & \alpha & + & \beta & + & \mu \end{array} \right. \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 2\alpha & - & \beta \\ x_2 & = & \alpha & + & 2\beta \\ x_3 & = & -\alpha & + & \beta \\ x_4 & = & & & \beta \end{array} \right.$$

Sol: $L_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \;\; L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right.$

Ejercicio 2.32 Se consideran en $\mathbf{R}^4$ los subespacios F y G engendrados respectivamente por $< u_1, u_2, u_3 >$ y $< v_1, v_2, v_3 >$, siendo:

$$u_1 = (3, 3, 1, 1) \qquad u_2 = (1, -3, 1, 1) \qquad u_3 = (3, 1, -1, 3)$$

$$v_1 = (2, 2, 0, 1) \qquad v_2 = (2, 0, 1, 1) \qquad v_3 = (1, 1, -1, -1)$$

Hallar las ecuaciones de $F \cap G$ y de $F + G$.

Sol: $F \cap G \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad F + G = \mathbf{R}^4.$

Ejercicio 2.33 Dar una condición necesaria y suficiente para que:

$$< v_1, v_2, \ldots, v_n > \qquad \text{y} \qquad < v_1, v_2, \ldots, v_n, w >$$

sean las mismas variedades lineales.

Sol: Que w sea combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ejercicio 2.34 En $\mathbf{R}^4$ se consideran las variedades lineales:

$$L_1 =< (1,-1,2,0),(1,2,-1,3),(2,2+\alpha,3+2\alpha,3) >$$

$$L_2 : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (\beta-1)x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2\beta x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Estudiar, en función de los valores de α y β, L_1+L_2 y $L_1\cap L_2$, dando sus ecuaciones, dimensiones y bases.

Sol:

a) Si $\alpha=-1$ y $\beta=1$ 0 $\alpha\neq -1$ y $\beta\neq 1$ $L_1\cap L_2=\{0\}$ y $L_i+L_2=\mathbf{R}^4$.

b) Si $\alpha=-1$ y $\beta\neq 1$ $L_1\cap L_2=\{0\}$ $L_1+L_2\equiv x_1-x_2+x_4=0$ con $\mathcal{B}_{L_1+L_2}=\{(1,-1,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ y $\dim(L_1+L_2)=3$.

c) Si $\alpha\neq -1$ y $\beta=1$ $\mathcal{B}_{L_1\cap L_2}=\{(9,-13,-2,4)\}$ y $\dim(L_1\cap L_2)=1$ con $L_1\cap L_2\equiv\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_4=0 \\ 2x_3+x_4=0 \\ 4x_1+2x_2-x_3-3x_4=0 \end{array}\right.$ y $L_1+L_2=\mathbf{R}^4$.

Ejercicio 2.35 En $\mathbf{R}^4$ se consideran las variedades lineales:

$$L_1 =< (1,-1,0,2),(0,2,1,-1),(2,0,1,\alpha) >$$

$$L_2 : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & + & \alpha x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Hallar α para que $L_1\cap L_2$ esté engendrado por un único vector. ¿Existe algún α para el cuál $L_1\cap L_2$ tenga una base de dos elementos?

b) Para los valores anteriores de α, hallar tres bases B_0, B_1 *y* B_2 de $L_1\cap L_2$, L_1 y L_1+L_2, respectivamente, de modo que $B_0\subset B_1\subset B_2$.

Sol:

a) Si $\alpha\neq 3$ es $\dim(L_1\cap L_2)=1$ mientras que si $\alpha=3$ es $L_1\cap L_2=\{0\}$. No existe ningún caso en el que $\dim(L_1\cap L_2)=2$

b) Para $\alpha \neq 3$ $B_0 = \{(3\alpha+1, \alpha-5, 2\alpha-2, 8)\}$,
$B_1 = \{(3\alpha+1, \alpha-5, 2\alpha-2, 8), (1, -1, 0, 2), (0, 2, 1, -1)\}$ y $B_2 = B_1$.

Ejercicio 2.36 Dadas las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & \alpha x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Hallar, en función de α, una base de $L_1 \cap L_2$ y unas ecuaciones de $L_1 + L_2$.

Sol: $$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_{L_1 \cap L_2} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \\ L_1 + L_2 \equiv x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. \\ \\ \text{Si } \alpha \neq 1 \left\{ \begin{array}{l} L_1 \cap L_2 = \{0\} \\ L_1 + L_2 = \mathbf{R}^4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. Aplicaciones lineales.

3.1 Definiciones y propiedades

A menudo el concepto de aplicación se confunde con el de función. A diferencia de una aplicación, no todos los elementos del conjunto de partida de una función tienen necesariamente una imagen en el conjunto de llegada. Por ejemplo, la función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \; / \; x \longmapsto x^2$ es aplicación, sin embargo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \; / \; x \longmapsto \frac{1}{x}$ no lo es pues el 0 no tiene imagen.

Definición 3.1 [Aplicación]

Una aplicación f entre dos conjuntos X e Y es cualquier regla que nos permite asignar a cada elemento x del conjunto inicial X un único elemento y del conjunto final Y. Se denota por $f : X \to Y$.

- $\forall\, x \in X \;\; \exists\, y \in Y$ *tal que* $f(x) = y$.
- $x = y \implies f(x) = f(y)$

Clasificación de las aplicaciones

Una aplicación $f : X \to Y$ diremos que es

- Inyectiva si

  $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ o lo que es lo mismo $f(x) = f(y) \implies x = y$

- Sobreyectiva si $\forall\, y \in Y \;\; \exists\, x \in X$ tal que $f(x) = y$
- Biyectiva si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Definición 3.2 [Aplicación lineal]

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$ y sea $f : U \to V$ una aplicación. Se dice que f es una aplicación lineal o un homomorfismo si

- $\forall\, x, y \in U \implies f(x+y) = f(x) + f(y)$ *aditividad.*
- $\forall\, \lambda \in \mathbf{K}$ *y* $\forall\, x \in U \implies f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *homogeneidad.*

Teorema 3.1 [Caracterización de las aplicaciones lineales]

Una aplicación f entre dos espacios vectoriales U y V definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$ es un homomorfismo si, y sólo si,

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \;\; y \;\; \forall\, x, y \in V \implies f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Demostración.

- Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal
$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$
- Si $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ se tiene:
  - Para $\lambda = \mu = 1 \implies f(x+y) = f(x) + f(y)$.
  - Para $\mu = 0 \implies f(\lambda x) = \lambda f(x)$

  por lo que f es una aplicación lineal. ■

Clasificación de las aplicaciones lineales

Atendiendo a las propiedades de la aplicación y a los espacios inicial y final podemos clasificarlas en

- Homomorfismo si $U \neq V$.
- Endomorfismos si $U = V$.
- Isomorfismos si $U \neq V$ y f es biyectiva.
- Automorfismos si $U = V$ y f es biyectiva.

Ejemplo 3.1

a) $f : \mathrm{P}_2[x] \to \mathrm{P}_1[x]$ definida por $f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$ o utilizando notación vectorial $f(a, b, c) = (2a, b)$ es un homomorfismo.

$$\begin{aligned} f[\lambda(a,b,c) + \mu(a',b',c')] &= f(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') = \\ &= (2(\lambda a + \mu a'), \lambda b + \mu b') = \\ &= (2\lambda a, \lambda b) + (2\mu a', \mu b') = \\ &= \lambda(2a, b) + \mu(2a', b') = \\ &= \lambda f(a,b,c) + \mu f(a',b',c') \end{aligned}$$

por lo que f es un homomorfismo (véase el Teorema 3.1).

b) $\theta : U \to V$ definida por $\theta(u) = 0 \ \ \forall u \in U$ es un homomorfismo y se dice que es el *homomorfismo nulo*.

c) $I : U \to U$ definida por $I(u) = u \ \ \forall u \in U$ es un automorfismo y se dice que es el *automorfismo identidad*. □

Definición 3.3 [Imagen de una aplicación lineal]

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Se denomina imagen de f y se denota por $\mathrm{Im} f$ o $f(U)$ al conjunto

$$\mathrm{Im} f = f(U) = \{v \in V \ : \ v = f(u) \ \text{ con } \ u \in U\}$$

Definición 3.4 [Núcleo de una aplicación lineal]

Se denomina núcleo de f y se denota por $\mathrm{Ker}\, f$ al conjunto

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in U \ : \ f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$$

Proposición 3.2 [Propiedades de las aplicaciones lineales]

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E' definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$. Se verifican las siguientes propiedades:

1) $f(0_E) = 0_{E'}$ y $f(-x) = -f(x) \;\; \forall\, x \in E$

$$f(x) = f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E) \implies f(0_E) = 0_{E'}$$

$$0_{E'} = f(0_E) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies$$

$$f(-x) = -f(x) \;\; \forall\, x \in E.$$

2) *Si U es un subespacio vectorial de E, $f(U)$ lo es de E'*

$$\forall\, x, y \in f(U) \implies \exists\, u, v \in U \;:\; f(u) = x,\; f(v) = y$$

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \;\text{ dado que }\; u, v \in U \implies \lambda u + \mu v \in U \implies$$

$$f(\lambda u+\mu v) \in f(U) \implies \lambda f(u)+\mu f(v) \in f(U) \implies \lambda x+\mu y \in f(U) \implies$$

$f(U)$ es un subespacio vectorial de E'.

3) *Si V es un subespacio vectorial de E', $f^{-1}(V)$ lo es de E*

$$\forall\, x, y \in f^{-1}(V) = \{x \in E \;:\; f(x) \in V\} \implies f(x), f(y) \in V$$

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \;\text{ dado que }\; f(x), f(y) \in V \implies \lambda f(x) + \mu f(y) \in V \implies$$

$$f(\lambda x + \mu y) \in V \implies \lambda x + \mu y \in f^{-1}(V) \implies$$

$f^{-1}(V)$ es un subespacio vectorial de E.

4) *Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son vectores linealmente dependientes en el espacio E, $f(u_1),\; f(u_2), \dots,\; f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes en E'.*

Si los vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ son linealmente dependientes, existen $\alpha_1, \dots,\; \alpha_n \in \mathbf{K}$ con algún $\alpha_i \neq 0$ tales que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$, es decir

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = f(0) = 0 \;\text{ con algún }\; \alpha_i \neq 0$$

Por ser f lineal, se tiene que

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = 0 \;\text{ con algún }\; \alpha_i \neq 0$$

por lo que

$f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ son linealmente dependientes.

5) *Si* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *es un sistema generador de* E*, el conjunto de vectores* $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ *es un sistema generador de* $f(E) \subset E'$.

$$\forall\, x \in f(E) \implies \exists\, y \in E \;:\; f(y) = x$$

$$y \in E \Longrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \Longrightarrow x = f(y) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) \Longrightarrow$$

$\{f(u_1),\ f(u_2), \ldots,\ f(u_n)\}$ es un sistema generador de $f(E)$.

Teorema 3.3 *Sea* $f : U \to V$ *una aplicación lineal.*

a) $\operatorname{Img} f = f(U)$*, es una variedad lineal de* V.

b) $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$*, es una variedad lineal de* U.

Demostración.

a) Es una consecuencia inmediata de la segunda propiedad de las aplicaciones lineales.

b) Es consecuencia de la tercera propiedad, ya que $\{0\}$ es una variedad lineal de U y $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$. ■

Definición 3.5 [Rango de una aplicación lineal]

Se denomina rango de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales U *y* V*, definidos sobre un mismo cuerpo* $\mathbf{K}$*, a la dimensión del subespacio imagen.*

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Img} f)$$

El rango de una aplicación lineal f es, por tanto, el rango del conjunto de vectores $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ donde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ constituye una base de U.

Como la dimensión de $\operatorname{Img} f$ es única, el rango de la aplicación *es independiente de las bases elegidas* de U y de V.

Teorema 3.4 [Caracterización de las aa.ll. lineales inyectivas]

Una aplicación lineal f entre dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$ *es inyectiva si, y sólo si,* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Demostración.

- Si f es inyectiva:

$$x \in \operatorname{Ker} f \implies \left.\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \implies f(x) = f(0) \implies x = 0 \implies$$

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}$$

- Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \implies f(x-y) = 0 \implies x - y \in \operatorname{Ker} f \implies \\ \implies x - y = 0 \implies x = y \end{aligned}$$

f es inyectiva. ■

Teorema 3.5 *Una aplicación lineal $f : U \to V$ es inyectiva si, y sólo si, cualquier sistema de vectores linealmente independientes de U se transforma mediante f en un sistema linealmente independiente de vectores de V.*

Demostración.

- Sea f inyectiva y $\{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema libre de vectores.

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = 0 \implies f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = 0 \implies$$

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \operatorname{Ker} f = \{0\} \implies \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

  y como $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ es un sistema libre de vectores, han de ser nulos todos los α_i $1 \le i \le n$, por lo que

$$\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} \text{ es un sistema libre.}$$

- Supongamos que para cualquier sistema libre $\{u_1, \dots, u_n\}$ el sistema $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ también es libre.

  Por ser para *cualquier* sistema libre, ha de verificarse para $\{u\}$ con $u \neq 0$.

  Al ser $\{f(u)\}$ un sistema libre es $f(u) \neq 0 \implies u \notin \operatorname{Ker} f$ de donde se deduce que

$$u \neq 0 \implies u \notin \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} f = \{0\} \implies$$

f es inyectivo. ■

Teorema 3.6 [Caracterización de las aa.ll. sobreyectivas]

Una aplicación lineal $f : U \to V$ es sobreyectiva si, y sólo si, cualquier sistema generador de U se transforma mediante f en un sistema generador de V.

Demostración.

- Sea f sobreyectiva $\iff \forall\, v \in V \;\; \exists\, u \in U \; : \; f(u) = v$

  Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema generador de U

  $$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \implies v = f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) \implies$$

  $$\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\} \text{ es un sistema generador de } V.$$

- Supongamos ahora que cualquier sistema generador de U $\{u_1, \ldots, u_n\}$ se transforma en un sistema $\{f(u_1), \ldots, f_{u_n}\}$ generador de V.

  Cualquier vector $v \in V$ verifica que

  $$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = f(u) \;\text{ con }\; u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in U \implies$$

  $$f \text{ es sobreyectiva.}$$ ■

Teorema 3.7 *Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo* **K** *se verifica que:*

$$\dim U = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Img} f)$$

Demostración. Sean $\dim U = n$ y $\dim V = m$.

Si $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r\}$ es una base de $\operatorname{Ker} f$ podemos ampliarla hasta formar una base $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r,\ b_1, \ldots,\ b_{n-r}\}$ de U.

Los vectores $\{b_1,\ b_2, \ldots,\ b_{n-r}\}$ constituyen una base de un subespacio vectorial H de U complementario del $\operatorname{Ker} f$

$$\operatorname{Ker} f + H = U \qquad \operatorname{Ker} f \cap H = \{0\}$$

$f(\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r,\ b_1, \ldots,\ b_{n-r}\}) = \{0,\ 0, \ldots,\ 0,\ f(b_1), \ldots,\ f(b_{n-r})\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im} f = f(U)$ por lo que

$$\{f(b_1), \ldots, f(b_{n-r})\} \;\text{ es un sistema generador de }\; \operatorname{Img} f.$$

$$\lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_{n-r} f(b_{n-r}) = 0 \implies f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r}) = 0 \implies$$

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in \operatorname{Ker} f$$

Como además $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in H$ se tiene que

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in \operatorname{Ker} f \cap H = \{0\} \implies \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} = 0$$

y como $\{b_1, \ldots, \ b_{n-r}\}$ son linealmente independientes, han de ser necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ por lo que

$\{f(b_1), \ldots, \ f(b_{n-r})\}$ son linealmente independientes.

Al tratarse de un sistema generador y libre, constituyen una base de $\operatorname{Img} f$, por lo que

$$\dim(\operatorname{Im} f) = n - r = \dim U - \dim(\operatorname{Ker} f) \implies$$

$$\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f). \quad \blacksquare$$

3.2 Ecuaciones de una aplicación lineal.

Una vez estudiadas las propiedades de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales nos preguntamos

¿Qué necesitamos conocer para definir una aplicación lineal?

Téngase en cuenta que la aplicación $f : U \to V$ no quedará definida hasta que no conozcamos cuál es el transformado de *cualquier* vector $x \in U$. Ahora bien, si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de U, cualquier vector $x \in U$ puede expresarse de la forma $x = \sum_{i=i}^{n} x_i u_i$, por lo que

$$f(x) = f(\sum_{i=i}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=i}^{n} f(x_i u_i) = \sum_{i=i}^{n} x_i f(u_i)$$

lo que nos permite establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.8 *Una aplicación lineal $f : U \to V$ queda definida cuando conocemos los transformados $f(u_i)$ de una base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U.*

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$, $\mathcal{B}_U = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ una base de U, $\mathcal{B}_V = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_m\}$ una base de V.

Dado que $f(u_i) \in V$, podemos expresarlos de la forma

$$f(u_i) = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{im}v_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}v_j \quad \forall\, i = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

$$\forall\, x \in U \implies \begin{cases} f(x) = f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}v_j \\ f(x) \in V \implies x' = f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x'_j v_j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x'_j v_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij})v_j \implies$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \quad 1 \le j \le m \implies \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots a_{n1}x_n \\ x'_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{n2}x_n \\ \vdots \\ x'_m = a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots a_{nm}x_n \end{cases}$$

que expresado en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x' = Ax$$

Es decir, $f(x) = Ax$ donde A es la matriz cuyas *columnas* son las coordenadas, respecto de la base $\mathcal{B}_V$ de V, de los transformados de una base $\mathcal{B}_U$ de U.

Dicha matriz recibe el nombre de *matriz asociada* a la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}_U$ de U y $\mathcal{B}_V$ de V.

3.3 Ecuaciones del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Consideremos una aplicación lineal $f : U \to V$.

Una vez obtenidas las ecuaciones de la aplicación lineal $x' = Ax$, el sistema $Ax = 0$ nos proporciona unas ecuaciones implícitas del núcleo de la aplicación.

Hay que tener en cuenta que no todas las ecuaciones resultantes tienen que ser independientes, por lo que nos quedaremos con las ecuaciones independientes del sistema.

Dado que las columnas de la matriz A son los transformados de una base de U sabemos que constituyen un sistema generador de $\operatorname{Img} f = f(U)$, por lo que las columnas linealmente independientes constituyen una base de la imagen.

Como el rango de una aplicación lineal es el rango de los vectores transformados de una base de U y este coincide con el rango de la matriz asociada, se tiene que:

> *El rango de una aplicación lineal es el rango de su matriz asociada respecto de dos bases cualesquiera.*

Si $\dim U = n$, al ser $\dim(\operatorname{Img} f) = \operatorname{rg} A$

$$\dim U = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) \implies \dim(\operatorname{Ker} f) = n - \operatorname{rg} A$$

siendo A cualquier matriz asociada a f.

Ejemplo 3.2 La aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ que, respecto a las bases canónicas de $\mathbf{R}^4$ y $\mathbf{R}^3$ viene definida por

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (2,0,1) \\ f(0,1,0,0) & = & (1,3,1) \\ f(0,0,1,0) & = & (0,0,0) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,0) \end{array}$$

tiene de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{array}{l} \dim(\operatorname{Img} f) = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = 2 \\ \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim \mathbf{R}^4 - \operatorname{rg} A = 4 - 2 = 2 \end{array}$$

Unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f$ vienen dadas por las ecuaciones independientes del sistema $Ax = 0$, es decir, si escalonamos la matriz del sistema

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Es decir, las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f$ son

$$\operatorname{Ker} f \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

por lo que los vectores e_3 y e_4 constituyen una base del núcleo.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Las columnas linealmente independientes de la matriz A, es decir, los vectores de $\mathbf{R}^3$ $(2, 0, 1)$ y $(1, 3, 1)$ constituyen una base de $\operatorname{Img} f$.

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Img} f} = \{(2, 0, 1), (1, 3, 1)\} \qquad \square$$

3.4 Matrices equivalentes.

Dada una aplicación lineal $f : U \to V$ acabamos de ver que tiene asociada una matriz A respecto a las bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_V$ de los espacios U y V respectivamente, de forma que

$$f(x) = x' = Ax$$

Si en vez de utilizar dichas bases utilizamos las bases $\mathcal{C}_U$ y $\mathcal{C}_V$ tendrá asociada otra matriz A' tal que

$$f(y) = y' = A'y$$

Sean P la matriz regular del cambio de base de $\mathcal{C}_U$ a $\mathcal{B}_U$ y Q la del cambio de base de $\mathcal{C}_V$ a $\mathcal{B}_V$ también regular. Entonces, $x = Py$ y $x' = Qy'$.

$$\left.\begin{array}{l} x' = Ax = APy \\ x' = Qy' = QA'y \end{array}\right\} \Longrightarrow QA'y = APy \quad \forall\, y \Longrightarrow QA' = AP \Longrightarrow$$

$$A' = Q^{-1}AP$$

Definición 3.6 [Matrices equivalentes]

Dos matrices A y B, del mismo orden, se dicen equivalentes cuando existen dos matrices regulares Q y P tales que

$$A = Q^{-1}BP$$

Es decir, dos matrices A y B son equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal y viceversa.

La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia. Los elementos de una misma clase de equivalencia son todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal y por tanto, *todas ellas tienen el mismo rango*.

Puede probarse también el teorema recíproco.

Teorema 3.9 *Si dos matrices tienen el mismo rango, son equivalentes.*

Un caso particular de la equivalencia es aquel en que las matrices están asociadas a una aplicación lineal $f : U \to U$ es decir, a un endomorfismo, en cuyo caso las matrices son cuadradas.

La matriz A está referida a la base $\mathcal{B}$ y la A' a otra base $\mathcal{C}$ del espacio U y, por tanto, $P = Q$ verificándose que

$$A' = P^{-1}AP$$

Definición 3.7 [Matrices semejantes]

Dos matrices cuadradas A y B, del mismo orden, se dice que son semejantes si existe otra matriz regular P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

De la propia definición de semejanza de matrices, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 3.10 *Dos matrices cuadradas son semejantes si, y sólo si, están asociadas a un mismo endomorfismo.*

3.5 Imagen inversa de una variedad lineal.

Si L es una variedad lineal, su imagen inversa por la aplicación lineal f, $f^{-1}(L)$ es otra variedad lineal (véase el apartado 3 de la Proposición 3.2).

$$x \in f^{-1}(L) \implies f(x) \in L$$

Imponiendo al vector $f(x)$ que verifique las ecuaciones implícitas de L obtenemos las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L)$.

Matricialmente podemos también resolver esta cuestión de la siguiente forma:

Sea L una variedad lineal dada por sus ecuaciones implícitas respecto de una base fijada. A la matriz asociada al sistema de ecuaciones que constituye dichas ecuaciones implícitas, la llamaremos B, con lo que las ecuaciones implícitas de L las representamos matricialmente como $By = 0$.

Sea f la aplicación lineal dada por $y = f(x)$ y sea A la matriz asociada a f, por lo que $y = Ax$.

$$x \in f^{-1}(L) \iff f(x) \in L \iff Ax \in L$$

como Ax es un vector, la condición para que pertenezca a L es que verifique sus ecuaciones implícitas, es decir que $B(Ax) = 0$.

BA es la matriz asociada a las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L)$.

Ejemplo 3.3 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + x_3)$$

y sea $L = <(1,3)>$

$$y \in L \implies (y_1, y_2) = \lambda(1,3) \implies \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \lambda \\ y_2 = 3\lambda \end{array} \right. \implies L \equiv 3y_1 - y_2 = 0$$

$$x \in f^{-1}(L) \iff f(x) = y \in L \iff 3y_1 - y_2 = 0 \implies$$

$$3(2x_1 - x_2) - (-x_1 + x_3) = 0 \implies 7x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \implies$$

$$f^{-1}(L) \equiv 7x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$

Matricialmente tendríamos:

$$Ax = y \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff y = Ax$$

$$L \equiv 3y_1 - y_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \iff By = 0$$

por lo que

$$By = B(Ax) = 0 \implies (BA)x = 0 \implies$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Es decir: $f^{-1}(L) \equiv 7x_1 - 3x_2 - x_3 = 0.$ □

Es obvio que vamos a obtener tantas ecuaciones implícitas para $f^{-1}(L)$ como tenía L, sin embargo, *nada garantiza que esas ecuaciones sean linealmente independientes* y habría que eliminar las que no lo fuesen.

3.6 Operaciones con aplicaciones lineales.

Trataremos las operaciones usuales entre aplicaciones lineales: suma de aplicaciones lineales, producto de un escalar por una aplicación lineal y composición de aplicaciones lineales.

Definición 3.8 [Suma de aplicaciones lineales]

Sean $f : U \to V$ y $g : U \to V$ dos aplicaciones lineales cualesquiera definidas sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$.

Se define la aplicación suma $f + g : U \to V$ como

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) \quad \forall\, u \in U.$$

Proposición 3.11 *La aplicación suma $f + g$ así definida es una aplicación lineal.*

Demostración.

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda u+\mu v) &= f(\lambda u+\mu v)+g(\lambda u+\mu v)= \\ &= \lambda f(u)+\mu f(v)+\lambda g(u)+\mu g(v)= \\ &= \lambda[f(u)+g(u)]+\mu[f(v)+g(v)]= \\ &= \lambda[(f+g)(u)]+\mu[(f+g)(v)]\end{aligned}$$

por lo que $f+g$ es lineal. ■

Proposición 3.12 *Sean $f:U\to V$ y $g:U\to V$ dos aplicaciones lineales cualesquiera definidas sobre un mismo cuerpo* $\mathbf{K}$.

Si, respecto de unas determinadas bases de U y V las matrices asociadas a f y g son A y B, respectivamente, la matriz asociada, respecto a las mismas bases de la aplicación $f+g$ es $A+B$.

Definición 3.9 [Producto por un escalar]

Sea $f:U\to V$ una aplicación lineal cualquiera definida sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y sea $\lambda\in\mathbf{K}$.

Se define la aplicación $\lambda f:U\to V$ como

$$(\lambda f)(u)=\lambda\cdot f(u)\quad \forall\, u\in U.$$

Proposición 3.13 *La aplicación λf así definida es una aplicación lineal.*

Demostración. La demostración es similar a la del caso de la suma. ■

Proposición 3.14 *Sea $f:U\to V$ una aplicación lineal definida sobre un cuerpo* $\mathbf{K}$.

Si, respecto de unas determinadas bases de U y V la matriz asociada a f es A, la matriz asociada, respecto a las mismas bases de la aplicación λf es λA.

Definición 3.10 [Composición de aplicaciones]

Sean dos aplicaciones lineales $f:U\to W$ y $g:W\to V$.

Se define la aplicación lineal compuesta f compuesta con g y se denota por $(g\circ f):U\to V$ como

$$(g\circ f)(u)=g[f(u)]\quad \forall, u\in U$$

OJO, ¡NO ES UN ERROR!

Decimos f compuesta con g para indicar que primero hay que aplicar f y, al resultado obtenido, aplicarle g, por lo que se trata de $g[f(u)]$ y por tanto, debemos escribir f a la derecha de g y no al revés.

Es evidente que no es lo mismo $f \circ g$ que $g \circ f$.

Ejemplo 3.4 Sean $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ y $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$.

Podemos definir f compuesta con g ya que se trata de $g[f(x)]$ donde $f(x) \in \mathbf{R}^2$ y g está definida en $\mathbf{R}^2$.

Sin embargo, no podemos definir g compuesta con f ya que se trataría de $f[g(x)]$ con $g(x) \in \mathbf{R}^4$ y f no está definida en $\mathbf{R}^4$.

Incluso en el caso en que ambas puedan ser definidas, pueden ser (y generalmente lo son) diferentes. □

Proposición 3.15 *La aplicación compuesta $g \circ f$, en caso de existir, es una aplicación lineal.*

Proposición 3.16 *Si continuamos llamando A a la matriz asociada a la aplicación lineal f y B a la matriz asociada a la aplicación lineal g, la matriz asociada a la aplicación lineal $(g \circ f)$ es $B \cdot A$.*

Ejemplo 3.5 Sean $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ y $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ las aplicaciones lineales que tienen por ecuaciones:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 5x_3)$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 4x_2)$$

Hallar las ecuaciones matriciales respecto de las correspondientes bases canónicas de $g \circ f$ y $f \circ g$. *Obsérvese que, en este caso, ambas composiciones son posibles*.

Denotemos por A a la matriz asociada a f cuyas columnas son las imágenes por f de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^3$ y por B a la matriz asociada a g cuyas columnas son las imágenes por g de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Las matrices asociadas a $g \circ f$ y $f \circ g$ son, respectivamente

$$g \circ f \iff BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -11 \end{pmatrix} \qquad f \circ g \iff AB = \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 16 & -22 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones pedidas son:

$$g \circ f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$f \circ g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 16 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Propiedades de las operaciones con aa.ll.

Siempre que las siguientes composiciones tengan sentido, y siendo f, g, y h homomorfismos y λ escalar, se verifica que:

$$\begin{gathered} (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \\ (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \\ h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g \\ \lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) \end{gathered}$$

3.7 Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1 Determinar una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, sabiendo que $(-1, 0, 0, 1)$ y $(1, 3, 2, 0)$ constituyen un sistema generador de $\operatorname{Ker} f$ y que los vectores $(1, 1, 1)$ y $(0, -2, 1)$ generan a $\operatorname{Img} f$.

Solución: Para que quede determinada una aplicación lineal debemos conocer los transformados de una base, por lo que, en primer lugar, debemos establecer una base de $\mathbf{R}^4$ como una ampliación de la base de $\operatorname{Ker} f$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

una base de $\mathbf{R}^4$ está constituida por

$$\mathcal{B}_{\mathbf{R}^4} = \{(-1,0,0,1),(1,3,2,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

Una aplicación f con las condiciones requeridas es la que transforma e_3 en $(1,1,1)$ y e_4 en $(0,-2,1)$, por lo que

$$\begin{aligned} f(-1,0,0,1) &= (0,\ \ 0,\ \ 0)\\ f(\ \ 1,3,2,0) &= (0,\ \ 0,\ \ 0)\\ f(\ \ 0,0,1,0) &= (1,\ \ 1,\ \ 1)\\ f(\ \ 0,0,0,1) &= (0,-2,\ \ 1)\end{aligned}$$

Es decir

$$A\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{siendo} \quad x' = Ax$$

■

Ejercicio 3.2 Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensiones 3 y 4 respectivamente, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una de W y f la aplicación lineal determinada por:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2w_1 - w_2 + w_3 + w_4\\ f(v_2) &= w_2 - 2w_3 + w_4\\ f(v_3) &= 4w_1 - w_2 + 3w_4\end{aligned}$$

a) Obtener las ecuaciones de f.

b) Determinar $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Img} f$.

SOLUCIÓN:

a) Por tratarse de dos bases de U y V se tiene

$$\begin{aligned} x \in V \qquad &\Longrightarrow x = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \\ x' = f(x) \in W &\Longrightarrow x' = x_1'w_1 + x_2'w_2 + x_3'w_3 + x_4'w_4 \end{aligned}$$

y como por ser f lineal se verifica que

$$f(x) = f(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + x_3f(v_3) \implies$$

$x' = (2x_1+4x_3)w_1+(-x_1+x_2-x_3)w_2+(x_1-2x_2)w_3+(x_1+x_2+3x_3)w_4$

Al ser únicas las coordenadas de un vector respecto de una base, las ecuaciones de f son

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 4x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_1 - 2x_2 \\ x_4' &= x_1 + x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

b) Para determinar $\operatorname{Ker} f$ resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

es decir, las ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f$ son

$$\operatorname{Ker} f \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + \ \ x_3 = 0 \end{cases}$$

Sus ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x_1 = -2\lambda \qquad x_2 = -\lambda \qquad x_3 = \lambda$$

y una base de $\operatorname{Ker} f$ es

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(-2, -1, 1)\}$$

Para determinar la imagen, debemos ver qué columnas de A son linealmente independientes.

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Así pues, una base de la imagen es

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Img}\, f} = \{(2,-1,1,1),(0,1,-2,1)\}$$

■

Ejercicio 3.3 Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definida por $f(x,y,z) = (-2x+y, 3z)$. Calcular las ecuaciones de f

a) Respecto de las bases canónicas.

b) Respecto de las bases $\left\{ \begin{array}{lc} B = \{(1,2,-1),(0,1,0),(3,1,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^3 \\ \text{y} & \\ B' = \{(0,2),(-1,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^2 \end{array} \right.$

c) Respecto de las bases $\left\{ \begin{array}{lc} C = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^3 \\ \text{y} & \\ C' = \{f(1,1,1), f(0,1,0)\} & \text{de } \mathbf{R}^2 \end{array} \right.$

Solución: Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las bases canónicas de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^2$ respectivamente.

a) La base canónica de $\mathbf{R}^3$ es $\mathcal{B} = \{(1,0,0)(0,1,0),(0,0,1)\}$ y sabemos que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (-2\cdot 1+0, -3\cdot 0) = (-2, \ \ 0) \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (-2\cdot 0+1, -3\cdot 0) = (\ \ 1, \ \ 0) \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (-2\cdot 0+0, -3\cdot 1) = (\ \ 0, -3) \end{aligned}$$

por lo que llamando $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ a la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, se verifica que

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(e_1\ e_2\ e_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es decir

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x'_{\mathcal{B}'} = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}x_{\mathcal{B}}$$

b) Sabiendo que el cambio de base de la base B' a la base canónica $\mathcal{B}'$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x'_{B'} = x'_{\mathcal{B}'}$$

y que el de la base B a la canónica $\mathcal{B}$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_B = x_{\mathcal{B}}$$

se tiene

$$x'_{\mathcal{B}'} = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} x_{\mathcal{B}} \implies \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x'_{B'} = A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_B \implies$$

$$x'_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_B \iff x'_{B'} = A_{BB'} x_B$$

es decir

$$A_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de f respecto a las bases B y B' son, por tanto

$$x'_{B'} = A_{BB'} x_B \quad \text{con} \quad A_{BB'} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Teniendo en cuenta que

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,1) = (-2\cdot 1 + 1, 3\cdot 1) = (-1,3) \\ f(0,1,0) = (-2\cdot 0 + 1, 3\cdot 0) = (\ \ 1,0) \end{array}\right\} \implies C' = \{(-1,3),(1,0)\}$$

y procediendo igual que antes llegamos a que

$$A_{CC'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de f respecto a las bases c y c' son, por tanto

$$x'_{C'} = A_{CC'} x_C \quad \text{con} \quad A_{CC'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ejercicio 3.4 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por

- $f(1,1,0) = (3,6,9)$.
- Si $L =< (1,2,3) >$ entonces $x_1 = x_3$ es una ecuación implícita de $f^{-1}(L)$.
- En la matriz asociada a f respecto de la base canónica $a_{11} = 1$ y $a_{33} = 3$.

Se pide:

a) La matriz asociada a f, respecto de las bases canónicas.

b) La dimensión, una base y unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Img} f$.

SOLUCIÓN:

a) Al tener una sola ecuación implícita

$$\dim f^{-1}(L) = \dim \mathbf{R}^3 - \text{número de ecuaciones implícitas} = 3 - 1 = 2$$

$$x_1 = x_3 \implies B_{f^{-1}(L)} = \{(1,0,1), (0,1,0)\}$$

Sabemos entonces que

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,0) = (3,\ 6,\ 9) \\ f(1,0,1) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \\ f(0,1,0) = (\mu, 2\mu, 3\mu) \end{array}\right\} \implies A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & \mu \\ 6 & 2\lambda & 2\mu \\ 9 & 3\lambda & 3\mu \end{pmatrix} \implies$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & \mu \\ 6 & 2\lambda & 2\mu \\ 9 & 3\lambda & 3\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3-\mu & \mu & -3+\lambda+\mu \\ 6-2\mu & 2\mu & -6+2\lambda+2\mu \\ 9-3\mu & 3\mu & -9+3\lambda+3\mu \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \Longrightarrow 3 - \mu = 1 \implies \mu = 2$$
$$a_{33} = 3 \Longrightarrow -9 + 3\lambda + 3\mu = 3 \implies -9 + 3\lambda + 6 = 3 \implies \lambda = 2$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo viene determinado por $Ax = 0$, por lo que sólo tiene una ecuación implícita

$$\operatorname{Ker} f \equiv x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Sus ecuaciones paramétricas son

$$x_1 = -2\lambda - \mu \quad x_2 = \lambda \quad x_3 = \mu$$

$$\lambda = 1,\ \mu = 0 \implies (-2, 1, 0)$$
$$\lambda = 0,\ \mu = 1 \implies (-1, 0, 1)$$

es decir, una base del núcleo es

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \implies \dim \operatorname{Ker} f = 2$$

Para determinar la imagen de la aplicación, sabemos que las columnas linealmente independientes de la matriz A constituyen una base de $\operatorname{Img} f$, por lo que

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Img} f} = \{(1, 2, 3)\} \implies \dim \operatorname{Img} f = 1$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x_1 = \lambda \quad x_2 = 2\lambda \quad x_3 = 3\lambda$$

y las ecuaciones implícitas

$$\operatorname{Img} f \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

■

Ejercicio 3.5 Sean los homomorfismos $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tales que:

1. $f(e_1) = (1, 2, -3),\ f(e_2) = (2, 1, 3),\ f(e_3) = (1, 3, -3).$

2. $(1,0,0,1) \in f^{-1}(L)$, siendo $L \equiv \begin{cases} x'_1 - 2x'_2 = 0 \\ x'_2 - \ \ x'_3 = 0 \end{cases}$

3. $g(0,0,1) = (1,1,-1)$

4. $\operatorname{Ker} g \circ f \equiv x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

Determinar:

a) f, g y $g \circ f$.

b) Unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Img} g \circ f$.

c) Una base de $(g \circ f)(L_1)$, siendo $L_1 \equiv x_1 - x_2 + x_4 = 0$

Solución:

a)

$$L \equiv \begin{cases} x'_1 - 2x'_2 = 0 \\ x'_2 - \ \ x'_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x'_1 = 2\lambda \\ x'_2 = \lambda \\ x'_3 = \lambda \end{cases} \implies \mathcal{B}_L = \{(2,1,1)\}$$

$$(1,0,0,1) \in f^{-1}(L) \implies f(1,0,0,1) \in L \implies f(1,0,0,1) = (2\lambda, \lambda, \lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0,1) = (2\lambda, \lambda, \lambda) \\ f(1,0,0,0) = (1,2,-3) \end{array}\right\} \implies f(e_4) = (2\lambda - 1, \lambda - 2, \lambda + 3)$$

Podemos decir por tanto, que

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2\lambda - 1 \\ 2 & 1 & 3 & \lambda - 2 \\ -3 & 3 & -3 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Ker} g \circ f \equiv x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \implies \begin{cases} x_1 = \lambda - \mu + \gamma \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \gamma \end{cases}$$

por lo que una base de $\operatorname{Ker} g \circ f$ viene dada por

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} g \circ f} = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (2,0,0,1)\}$$

$$x \in \operatorname{Ker} g \circ f \implies g \circ f(x) = 0 \implies g(A_f x) = 0$$

y dado que

$$A_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\lambda+1 \\ 3 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

sabemos que

$$\begin{array}{l} g(3,3,0) = (0,0,0) \\ g(0,1,0) = (0,0,0) \\ g(2\lambda+1, \lambda+2, \lambda-3) = (0,0,0) \\ g(0,0,1) = (1,1,-1) \end{array} \implies$$

$$A_g \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \implies A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además, $A_g \begin{pmatrix} 2\lambda+1 \\ \lambda+2 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda+1 \\ \lambda+2 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 \\ \lambda-3 \\ -\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda = 3$$

por lo que

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la aplcación compuesta $g \circ f$ es $A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$

$$A_{g \circ f} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Una base de $\operatorname{Img} g \circ f$ la forman las columnas linealmente independientes de la matriz $A_{g\circ f}$, por lo que sólo consta de un vector

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Img} g\circ f} = \{(1, 1, -1)\}$$

Sus ecuaciones paramétricas son

$$x_1 = \lambda \quad x_2 = \lambda \quad x_3 = -\lambda$$

y por tanto, sus ecuaciones implícitas son

$$\operatorname{Img} g \circ f \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

c) La variedad $L_1 \equiv x_1 - x_2 + x_4 = 0$ tiene por ecuaciones paramétricas

$$x_1 = \lambda - \mu \quad x_2 = \lambda \quad x_3 = \mu \quad x_4 = \gamma$$

por lo que una base de L_1 es

$$\mathcal{B}_{L_1} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$$

y un sistema generador de $g\circ f(L_1)$ lo forman los transformados de dichos vectores:

$$A_{g\circ f}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\mathcal{B}_{g\circ f(L_1)} = \{(1, 1, -1)\}$$

■

Ejercicio 3.6 En $\mathbf{R}^3$, respecto de la base canónica, se consideran las variedades lineales:

$$L_1 : x - y = 0 \qquad\qquad L_2 =< (1, -1, 1) >$$

a) Probar que $\mathbf{R}^3 = L_1 \oplus L_2$.

b) Calcular, respecto de la base canónica, la matriz de todos los endomorfismos f de $\mathbf{R}^3$ tales que $f(L_1) \subset L_2$ y $f(0,1,0) = (1,0,-1)$.

c) Comprobar que todos los endomorfismos del apartado anterior tienen, a lo sumo, rango 2. ¿Existe algún endomorfismo de rango 1?

d) Encontrar $f \in \operatorname{End}(\mathbf{R}^3)$ que cumple las condiciones del segundo apartado y que además $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$, $f(1,0,-1) = (-3,2,-1)$. ¿Es único? En tal caso, calcular una base de los subespacios $f^{-1}(L_1)$ y $f(L_2)$.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de L_1 son

$$x_1 = \lambda \qquad x_2 = \lambda \qquad x - 3 = \mu$$

por lo que una base de L_1 es

$$\mathcal{B}_{L_1} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$$

Un sistema generador del subespacio suma lo constituyen los vectores de la base de L_1 junto con el vector $(1,-1,1)$ de la base de L_2, y dado que los tres son linealmente independientes $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^3$.

Además, por ser $\dim(L_1 + L_2) = \dim \mathbf{R}^3 = 3$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) \implies$$

$$3 = 2 + 1 - \dim(L_1 \cap L_2) \implies \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \implies L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

por lo que la suma es directa, es decir

$$L_1 \oplus L_2 = \mathbf{R}^3$$

b) $f(L_1) \subset L_2 \implies \begin{cases} f(1,1,0) = (\lambda, -\lambda, \lambda) \\ f(0,0,1) = (\mu, -\mu, \mu) \end{cases}$

y al ser $f(0,1,0) = (1,0,-1)$ se tiene que

$$A_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ -\lambda & -\mu & 0 \\ \lambda & \mu & -1 \end{pmatrix} \implies$$

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ -\lambda & -\mu & 0 \\ \lambda & \mu & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & \mu \\ -\lambda & 0 & -\mu \\ \lambda+1 & -1 & \mu \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{matrix} \lambda-1 & 1 & \mu \\ -\lambda & 0 & -\mu \\ \lambda+1 & -1 & \mu \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda-1 & 1 & \mu \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda-1 & 1 & \mu \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda & 0 & \mu \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

de donde se deduce que el rango de los endomorfismos no puede ser 3, es decir

$$\operatorname{rg} f \leq 2$$

Para que $\operatorname{rg} f = 1$ han de ser $\lambda = \mu = 0$, en cuyo caso nos queda el endomorfismo cuya matriz asociada es

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \operatorname{rg} f = 1$$

d)

$$(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f \implies \left.\begin{array}{l} f(1,\ 1,\ 1) = (\ 0,\ 0,\ 0) \\ f(1,\ 0,-1) = (-3,\ 2,-1) \end{array}\right\} \implies$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & \mu \\ -\lambda & 0 & -\mu \\ \lambda+1 & -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda-1-\mu \\ -\lambda-\mu & -\lambda \quad +\mu \\ \lambda+\mu & \lambda+1-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{r} \lambda+\mu = 0 \\ -\lambda+\mu = 2 \end{array} \right.$$

es decir, $\lambda = -1$ y $\mu = 1$, por lo que *la solución es única*

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $L_1 \equiv x_1 - x_2 = 0$, la ecuación implícita de $f^{-1}(L_1)$ viena dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$f^{-1}(L_1) \equiv -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda + 2\mu \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = 3\mu \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 1 \quad \mu = 0 \Longrightarrow (1,3,0) \\ \\ \lambda = 0 \quad \mu = 1 \Longrightarrow (2,0,3) \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{B}_{f^{-1}(L_1)} = \{(1,3,0),(2,0,3)\}$$

Como un sistema generador de $f(L_2)$ está constituido por los transformados de una base de L_2 y ésta sólo tiene al vector $(1,-1,1)$ que se transforma mediante f en

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

una base de $f(L_2)$ la constituye el vector $(-2,0,2)$ o bien cualquiera proporcional a él, es decir

$$\mathcal{B}_{f(L_2)} = \{(1,0,-1)\}$$ ■

3.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.7 Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (2x + y, -z, 0)$$

a) Determinar $\operatorname{Ker} f$ y hallar una base de dicho subespacio.

b) Hallar el rango de f.

c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ a $\operatorname{Ker} f$?

Sol: $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,-2,0)\}$, $\operatorname{rg} f = 2$, $(6,-2,0) \notin \operatorname{Ker} f$.

Ejercicio 3.8 Consideremos la aplicación lineal $f : P_2[x] \to \mathbf{R}^4$ que a cada polinomio $p \in P_2[x]$ le asigna $(p(0), p(1), p(2), p(3))$. Se pide:

a) Calcular las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.

b) Obtener las coordenadas de $f(2x^2 - x + 1)$ respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

c) Determinar $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Img} f$.

Sol:

a) $x' = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $(1, 2, 7, 16)$.

c) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Img} f} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 3)\}$.

Ejercicio 3.9 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ tal que $\operatorname{Ker} f$ viene dado por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y unas ecuaciones de $\operatorname{Img} f$ son $\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right.$ respecto de una base B de $\mathbf{R}^3$

a) Hallar las ecuaciones de f respecto de B.

b) Determinar f^2.

Sol: Las ecuaciones de f son $x' = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y f^2 es el endomorfismo nulo.

Ejercicio 3.10 Sean $f : E \to F$ una aplicación lineal cuyas ecuaciones, respecto de las bases B y B', son

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

y L un subespacio de E. Determinar $f(L)$ en los siguientes casos:

a) Una base de L está formada por los vectores v y w, cuyas coordenadas respecto de B son $(3, 0, 2, 1)$ y $(4, 2, 2, 2)$ respectivamente.

b) Unas ecuaciones implícitas de L son:

$$L = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sol: a) $B_{f(L)} = \{(1, 5, 6)\}$ b) $B_{f(L)} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 3.11 Sea f la aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^4$ que respecto de las bases canónicas tiene por ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinar $f^{-1}(L)$ para los siguientes subespacios L de $\mathbf{R}^4$:

a) Las ecuaciones implícitas de L son $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

b) Las ecuaciones de L son: $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

c) $L =< (1, 0, -1, -1), (1, -1, 0, 2) >$.

Sol:

a) $f^{-1}(L) \equiv (a-2b+c+5d)x_1+(2a-b-c+d)x_2+(5a-b-4c-2d)x_3 = 0$.

b) $f^{-1}(L) \equiv 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

c) $f^{-1}(L) = \mathbf{R}^3$.

Ejercicio 3.12 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = (1, 1, 0, 1)\ ,\ f(e_2) = (-1, 2, 0, 0)\ ,\ f(e_3) = (0, 3, 0, 1)$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases

$B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$
y
$B' = \{(1, 0, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\}$.

Sol: $A = \begin{pmatrix} -17 & -17 & -6 \\ 8 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 11/3 & 11/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.13 Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbf{R}^4$ y sean f y g los endomorfismos de $\mathbf{R}^4$ determinados por:

$$\begin{array}{ll} f(u_1) = (-1, 2, 0, -1) & g(u_1) = (2, 0, 0, 1) \\ f(u_2) = (0, 0, -1, 0) & g(u_2) = (0, 1, -1, 0) \\ f(u_3) = (-2, 4, -1, -2) & g(u_3) = (2, 1, -1, 1) \\ f(u_4) = (0, 0, 0, 1) & g(u_4) = (4, 0, 0, 2) \end{array}$$

a) Determinar las matrices asociadas a f y g, respecto de la base $\mathcal{B}$.

b) Idem para $3f,\ 2f - g,\ g \circ f\ y\ f \circ g$.

Sol: $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{3f} = 3 \cdot A_f$, $A_{2f-g} = 2 \cdot A_f - A_g$, $A_{g \circ f} = A_g A_f$ y $A_{f \circ g} = A_f A_g$.

Ejercicio 3.14 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ determinado por

$$f(1, 1, 1) = (1 + a, 1, 1 + a),\ f(0, 1, 1) = (a, 1, 1 + a),\ f(0, 0, 1) = (0, 1, a)$$

y sean L_1, L_2 las variedades lineales de $\mathbf{R}^3$ definidas por:

$$L_1 \equiv x_2 - x_3 = 0 \qquad L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Hallar la matriz de f respecto de la base canónica.

b) Estudiar para qué valores de a es f un automorfismo.

c) Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal

$$L_3 = f^{-1}(f(L_1) + L_1)$$

d) Determinar para qué valores de a es $\mathbf{R}^3 = L_2 \oplus L_3$.

Sol:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$.

b) f es automorfismo $\forall\, a \in \mathbf{R}$.

c) Si $a \neq 0$ $L_3 = \mathbf{R}^3$ mientras que si $a = 0$ $L_3 = L_1 \equiv x_2 - x_3 = 0$ siendo $\mathcal{B}_{L_3} = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$.

d) $a = 0$.

Ejercicio 3.15 Sean $f, g \in \operatorname{End}(\mathbf{R}^3)$ tales que:

1. $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_2)$
2. $g(1,0,0) = (1,1,1)$
3. $g(f(x_1,x_2,x_3)) = (0,0,0) \qquad \forall\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$.

Se pide:

a) Demostrar que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Img} f$.

b) Hallar las matrices asociadas a g y $f \circ g$, respecto de la base canónica.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Img} f \circ g$ respecto de la base canónica, y una base de $\operatorname{Ker} f \circ g$.

Sol: $A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_{f \circ g} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$

$\operatorname{Img} f \circ g \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right., \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f \circ g} = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$

Ejercicio 3.16 Sean $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definidas por:

$$f(x,y,z) = (x, -y, z, x + y + z) \quad y \quad g(x,y,z) = (-x, y, 2x, -x - y + z)$$

a) Hallar la expresión matricial de $f + g$ respecto de las bases canónicas.

b) Idem para $3f - 2g$.

c) Determinar $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Ker} g$. ¿Es $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$?

Sol: $A_{f+g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{3f-2g} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix},$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \{0\} \\ \operatorname{Ker} g = \{0\} \\ \dim \operatorname{Ker}(f+g) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g \neq \operatorname{Ker}(f+g).$$

Ejercicio 3.17 En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ y respecto a la base canónica se consideran las variedades lineales siguientes:

$$L =< (1,4,1,-1),(2,3,2,3) > \qquad R =< (0,1,0,0),(1,0,-1,2) >$$

$$M =< (1,1,1,-3),(3,-2,3,-4),(3,-2,3,-4) > \qquad K : \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_4 = 0 \\ \\ 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Sea f el endomorfismo dado por:

$$f(0,1,0,0) = (-1,3,0,-1) \qquad f(1,-1,1,-1) = (1,-2,a,b)$$

$$f(1,1,0,-3) = (m,-5,n,2) \qquad \operatorname{Ker} f = L \cap M \qquad f(K) = R$$

a) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

b) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base:

$$B = \{(-1,2,0,-1),(0,1,0,0),(1,-2,1,0),(0,1,0,-1)\}$$

Sol: a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.18 Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ se define la aplicación lineal

$$f_\lambda : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3, \quad f_\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\lambda x_1 + x_2, x_1 + \lambda x_3, x_2 + x_4)$$

a) Estudiar los valores de λ que hacen que f_λ sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

b) Hallar una base de Ker f_2.

c) Sea la variedad lineal L de $\mathbf{R}^4$ de ecuaciones $x_1 = x_3 = 0$, calcular $f_0(L)$.

d) Dada la base de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$, hallar la matriz de f_1 respecto a la base canónica de $\mathbf{R}^4$ y $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

Sol: $\begin{cases} \lambda = 0 \implies \text{biyectiva} \\ \lambda \neq 0 \implies \text{sólo sobreyectiva} \end{cases}$ $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f_2} = \{(2,-4,-1,4)\}$,

$f_0(L) =< (1,0,0),(0,0,1) >$, $A_{C\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.19 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por:

- El vector $(1,0,1)$ se transforma, mediante f, en sí mismo.
- La variedad lineal de ecuación $x_1 - x_2 = 0$ también se transforma en sí misma mediante f.
- La matriz asociada a f, respecto de la base canónica, es simétrica y de traza nula.

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.

b) ¿Es posible determinar una base del núcleo *sin necesidad de hallar sus ecuaciones*? Razona la respuesta.

c) Siendo H la variedad lineal generada por los vectores $(1,1,1)$ y $(2,2,0)$, hallar una base de $f^{1996}(H)$.

d) Determinar una base de $f(L) \cap H$ donde L es la variedad de ecuación $x_3 = 0$

Sol: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\mathcal{B}_{f^{1996}(H)} = \{(0,0,1),(1,1,0)\}$,
$\mathcal{B}_{f(L)\cap H} = \{(1,1,-2)\}$

4. Ortogonalidad.

El concepto de *espacio vectorial* surgió como una generalización del espacio de los vectores geométricos tomando como punto de partida las propiedades de dichos vectores que provenían de la suma y el producto por un escalar. Así se definieron: subespacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, etc.

Para los vectores geométricos hay otros conceptos como los de *longitud o norma, ángulo de dos vectores, etc.*, que no se contemplan al hacer la anterior abstracción y que, por tanto, hasta ahora no tienen significado alguno en un espacio vectorial abstracto.

Se trata ahora de superponer a una estructura de espacio vectorial una nueva estructura que nos permita hablar de ángulos y distancias y conviene tener en cuenta que a partir de este momento el cuerpo base del espacio vectorial, que antes era un cuerpo $\mathbf{K}$ cualquiera, será el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales o $\mathbf{C}$ de los números complejos.

En el estudio de los vectores geométricos, se definen ángulos y distancias y, a partir de ellos, se introduce el concepto de *producto escalar* o *producto interior* de vectores. En el proceso de abstracción se tomarán como axiomas para definir un producto escalar las propiedades que caracterizan al producto escalar de los vectores geométricos y, a partir de él, se introducirán los conceptos métricos de ángulos y distancias.

4.1 Formas bilineales.

Definición 4.1 [Formas bilineales]

Sea V un espacio vectorial real. Una forma bilineal b sobre V es una aplicación $b : V \times V \to \mathbf{R}$ tal que:

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, x, y, x', y' \in V \\ \\ \forall\, \alpha \in \mathbf{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b(x + x', y) = b(x, y) + b(x', y) \\ \\ b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y') \\ \\ b(\alpha x, y) = b(x, \alpha y) = \alpha \cdot b(x, y) \end{array}\right.$$

- *Se dice que b es simétrica si*

$$b(x, y) = b(y, x) \quad \forall\, x, y \in V$$

- *Se dice que b es definida positiva si*

$$b(x, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in V \quad \textit{con} \quad b(x, x) = 0 \iff x = 0$$

Definición 4.2 [Matriz asociada a una forma bilineal]

Sea $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ una base de V y $b : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal.

$$\forall\, x, y \in V \implies x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \qquad y = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$$

$$b(x, y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(u_i, u_j)$$

y en forma matricial

$$b(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(u_1, u_1) & b(u_1, u_2) & \cdots & b(u_1, u_n) \\ b(u_2, u_1) & b(u_2, u_2) & \cdots & b(u_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(u_n, u_1) & b(u_n, u_2) & \cdots & b(u_n, u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$b(x, y) = x^T A\, y$$

siendo $A = \Big(b(u_i, u_j)\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$.

A esta matriz A se le denomina matriz asociada a la forma bilineal b respecto de la base $\mathcal{B}$.

Este resultado tiene su recíproco, es decir, cualquier matriz cuadrada A define la forma bilineal

$$b(x, y) = x^T A\, y$$

- Si b es simétrica, la matriz A es simétrica.
- Si b es definida positiva, se dice que la matriz A asociada a b es una matriz *definida positiva*

4.2 Producto escalar.

Definición 4.3 [Producto escalar]

Se denomina producto escalar sobre un espacio vectorial V a cualquier forma bilineal, simétrica y definida positiva definida sobre V.

El producto escalar de dos vectores x e y se representa por $\langle\, x, y\,\rangle$ y, teniendo en cuenta que se trata de una forma bilineal simétrica y definida positiva, viene dado por

$$\langle\, x, y\,\rangle = x^T A\, y$$

donde A representa la matriz del producto escalar respecto de una determinada base $\mathcal{B}$ de V.

Definición 4.4 [Espacio vectorial euclídeo]

Un espacio vectorial real sobre el que se ha definido un producto escalar se dice que es un espacio vectorial euclídeo y se representa por el par $[V,\ \langle\,\rangle]$

El producto escalar no es único pues pueden definirse numerosas formas bilineales simétricas y definidas positivas sobre un mismo espacio vectorial.

Ejemplo 4.1 Los productos definidos a continuación son productos escalares en $\mathbf{R}^2$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$

- $\langle\, x, y\,\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
- $\langle\, x, y\,\rangle = 8x_1y_1 + 3x_2y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2 = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\square$

¿Cómo podemos deerminar la matriz de un producto escalar respecto de una base $\mathcal{B}$?

Teorema 4.1 *Para determinar el producto escalar de dos vectores cualesquiera es necesario y suficiente conocer los productos escalares $\langle\, u_i, u_j \,\rangle$ de los vectores de una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$.*

Demostración. Sea $[V,\ \langle\,\rangle]$ un espacio euclídeo y $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ una base V.

$$\forall\, x, y \in V \implies x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=i}^{n} y_j u_j \implies$$

$$\langle\, x, y \,\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \,\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle\, u_i, u_j \,\rangle$$

por lo que el producto escalar queda determinado si, y sólo si, se conocen los ç productos $\langle\, u_i, u_j \,\rangle = a_{ij}$ de los vectores de la base $\mathcal{B}$, siendo

$$\langle\, x, y \,\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \langle\, u_1, u_1 \,\rangle & \langle\, u_1, u_2 \,\rangle & \cdots & \langle\, u_1, u_n \,\rangle \\ \langle\, u_2, u_1 \,\rangle & \langle\, u_2, u_2 \,\rangle & \cdots & \langle\, u_2, u_n \,\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\, u_n, u_1 \,\rangle & \langle\, u_n, u_2 \,\rangle & \cdots & \langle\, u_n, u_n \,\rangle \end{pmatrix}$$

Dicha matriz A recibe el nombre de *matriz de Gram* correspondiente al producto escalar considerado respecto de la base $\mathcal{B}$. ■

Teorema 4.2 *La matriz asociada a un producto escalar, respecto de cualquier base, es simétrica y regular. El recíproco no es cierto.*

Demostración.

a) Es simétrica por ser el producto escalar una forma bilineal simétrica.

b) El único vector $x \in V$ tal que $\langle\, x, y \,\rangle = 0 \ \ \forall\, y \in V$ es $x = 0$ ya que de lo contrario se tendría $\langle\, x, x \,\rangle = 0$ con $x \neq 0$ lo que contradice la hipótesis de ser definida positiva.

Probar que A es regular equivale a probar que el sistema $Ax = 0$ sólo admite la solución trivial.

Supongamos que existe algún vector no nulo $z \in V$ tal que $Az = 0$. Entonces,

$$\forall\, y \in V \quad (A\,z)^T y = 0 \iff z^T A^T y = z^T A\, y = \langle\, z, y\,\rangle = 0$$

Pero $\langle\, z, y\,\rangle = 0 \;\; \forall\, y \in V \implies z = 0$ lo que contradice la hipótesis de ser $z \neq 0$ y por tanto, no existe ningún vector no nulo $z \in V$ tal que $Az = 0$ es decir, $Ax = 0$ sólo admite la solución trivial, por lo que A es regular.

c) El recíproco no es cierto ya que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ no es la matriz de un producto escalar a pesar de ser simétrica y regular, pues

$$(1 \;\; -1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2 \;\, 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

y por tanto A no representa a una forma bilineal definida positiva. ■

Si la matriz $A = (\langle\, u_i, u_j\,\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ del producto escalar es la matriz unidad se tiene que

$$\langle\, x, y\,\rangle = x^T y$$

y diremos que se trata del *producto escalar canónico*.

Como la expresión matricial de un producto escalar depende de la base utilizada, cabe preguntarse

Dado un producto escalar cualquiera, ¿existe siempre una base respecto de la cual su matriz sea la matriz unidad?

Vamos a ver, a continuación, que

1.- Siempre es posible en encontrar dicha base.

2.- Un método que nos permita encontrarla.

Definición 4.5 [Norma de un vector]

Sea $[V, \langle\,\rangle]$ *un espacio vectorial euclídeo. Se denomina norma del vector* $x \in V$ *al número real positivo*

$$\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$$

que tiene sentido ya que $\langle x, x \rangle \geq 0 \;\; \forall x \in V$.

Proposición 4.3 [Propiedades de la norma]

- $\forall x \in V \quad \|x\| \geq 0 \quad con \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V \quad y \quad \forall \alpha \in \mathbf{R} \implies \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- *Ley del paralelogramo:*

$$\forall x, y \in V \implies \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- *Desigualdad de Cauchy-Schwartz:*

$$\forall x, y \in V \implies |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- *Desigualdad de Minkowski:*

$$\forall x, y \in V \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- $\forall x, y \in V \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

Definición 4.6 [Ángulo de dos vectores]

Sean $x, y \in V$ *no nulos. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se deduce que*

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

y como $\|x\| \neq 0 \quad \|y\| \neq 0 \implies$

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Al número $\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$ *se le define como* $\cos\alpha$ *diciéndose que* α *es el ángulo que forman los vectores* x *e* y.

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\widehat{(x, y)}$$

4.3 Ortogonalidad

Definición 4.7 [Vectores ortogonales]

Sea $[V, \langle\,\rangle]$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que los vectores $x, y \in V$, no nulos, son ortogonales respecto del producto escalar $\langle\,\rangle$ si se verifica que $\langle\, x, y \,\rangle = 0$.

Teorema 4.4 [Teorema de Pitágoras]

Sea $[V, \langle\,\rangle]$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $x, y \in V$ son ortogonales si, y sólo si,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Demostración.

- Si $x \perp y$

  $$\|x+y\|^2 = \langle\, (x+y), (x+y) \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle + \langle\, x, y \,\rangle + \langle\, y, x \,\rangle + \langle\, y, y \,\rangle$$

  y como $\langle\, x, y \,\rangle = \langle\, y, x \,\rangle = 0$, $\langle\, x, x \,\rangle = \|x\|^2$ y $\langle\, y, y \,\rangle = \|y\|^2$ se tiene que

  $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- Si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

  $$\|x+y\|^2 = \langle\, (x+y), (x+y) \,\rangle = \langle\, x, x \,\rangle + \langle\, x, y \,\rangle + \langle\, y, x \,\rangle + \langle\, y, y \,\rangle$$

  Como $\langle\, x, y \,\rangle = \langle\, y, x \,\rangle$

  $$\|x+y\|^2 = \langle\, x, x \,\rangle + 2\langle\, x, y \,\rangle + \langle\, y, y \,\rangle = \|x\|^2 + 2\langle\, x, y \,\rangle + \|y\|^2$$

  Dado que, por hipótesis es

  $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

  se obtiene que

  $$\langle\, x, y \,\rangle = 0 \implies x \perp y.$$

Definición 4.8 *Sea $[V, \langle\,\rangle]$ un espacio vectorial euclídeo y sean H y H' dos subconjuntos no vacíos de V.*

- *Se dice que H es ortogonal a H', y se denota por $H \perp H'$, si*

$$\langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall x \in H \quad y \ \ \forall y \in H'$$

- *Se define el conjunto ortogonal a H y se denota por $H^\perp$ al conjunto*

$$H^\perp = \{x \in V \ : \ \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall y \in H\}$$

- *Se dice que H es un conjunto ortogonal si $\langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall x, y \in H$ con $x \neq y$*

- *Se dice que H es un conjunto ortonormal si es ortogonal y verifica además que $\|x\| = 1 \ \ \forall x \in H$*

Teorema 4.5 *Si dos subconjuntos H y H' de un espacio vectorial euclídeo $[V, \langle\,\rangle]$ son ortogonales, entonces son disjuntos, es decir $H \cap H' = \{0\}$.*

Demostración. Si $z \in H \cap H' \implies z \in H$ y $z \in H'$.

$$\left.\begin{array}{c} z \in H \quad z \in H' \\ H \perp H' \end{array}\right\} \implies \langle z, z \rangle = 0 \implies z = 0 \implies H \cap H' = \{0\} \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.6 *Sean H y H' dos subconjuntos ortogonales de un espacio vectorial euclídeo $[V, \langle\,\rangle]$. Las variedades $\mathcal{L}(H)$ y $\mathcal{L}(H')$ también son ortogonales.*

Demostración. Para cualesquiera que sean los vectores $y \in H$ y $z \in H'$

$$\left.\begin{array}{lll} y \in \mathcal{L}(H) & \implies & y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad x_i \in H \\ z \in \mathcal{L}(H') & \implies & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_i x'_i \quad \text{con} \quad x'_i \in H' \end{array}\right\} \implies$$

$$\langle y, z \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j x'_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \langle x_i, x'_j \rangle$$

$$H \perp H' \implies \langle x_i, x'_j \rangle = 0 \ \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ \forall j = 1, 2, \ldots, m \end{array} \right. \implies \langle y, z \rangle = 0$$

y por tanto, $\mathcal{L}(H) \perp \mathcal{L}(H')$. $\blacksquare$

Teorema 4.7 *Sea $[V,\ \langle\,\rangle]$ un espacio vectorial euclídeo y $H \subset V$ una variedad lineal de V. El conjunto $H^\perp$ ortogonal de H es otra variedad lineal de V que llamaremos subespacio ortogonal de H o variedad ortogonal a H.*

Demostración. Para cualesquiera que sean los vectores $x_1, x_2 \in H^\perp$ y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ se tiene que

$$\forall\, y \in H \implies \langle\, \alpha x_1 + \beta x_2, y\,\rangle = \alpha\langle\, x_1, y\,\rangle + \beta\langle\, x_2, y\,\rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Es decir,

$$\forall\, y \in H \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \perp y \iff \alpha x_1 + \beta x_2 \in H^\perp$$

por lo que $H^\perp$ es una variedad lineal de V. ■

Teorema 4.8 *Si $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto ortogonal de un espacio vectorial euclídeo $[V,\ \langle\,\rangle]$, es un sistema libre. En otras palabras, los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son linealmente independientes.*

Demostración. Sea $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n$ una combinación lineal cualquiera de los vectores de H.

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \implies$$

$$\langle\, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n, x_k\,\rangle = \langle\, 0, x_k\,\rangle = 0 \quad \forall k = 1,\ 2, \ldots,\ n \implies$$

$$\alpha_1\langle\, x_1, x_k\,\rangle + \cdots + \alpha_k\langle\, x_k, x_k\,\rangle + \cdots + \alpha_n\langle\, x_n, x_k\,\rangle = 0$$

Como H es ortogonal y $\langle\, x_k, x_k\,\rangle \neq 0$

$$\langle\, x_i, x_k\,\rangle = 0 \quad \forall\, i \neq k \implies \alpha_k\langle\, x_k, x_k\,\rangle = 0 \implies \alpha_k = 0 \quad \forall\, k = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

por lo que H es un sistema libre. ■

El Teorema 4.8 nos lleva al siguiente resultado: si disponemos de n vectores ortogonales $u_1, \ldots, u_n$ de un espacio vectorial V de dimensión n, dichos vectores constituyen una base $\mathcal{B}$ de V.

¿Cómo se ve afectada la matriz de un producto escalar cuando efectuamos un cambio de bases en el espacio V?

Sea $[V,\ \langle\,\rangle]$ un espacio vectorial euclídeo y consideremos dos bases de V

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

La matriz P correspondiente al cambio de bases de la base $\mathcal{B}_2$ a la $\mathcal{B}_1$ (constituida, por columnas, por las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_2$ respecto a la $\mathcal{B}_1$) es tal que si denotamos por x_1 y x_2 a un mismo vector respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se obtiene que

$$x_1 = Px_2$$

Sean A_1 y A_2 las matrices asociadas al producto escalar $\langle\,\rangle$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente.

Como el producto escalar de dos vectores es independiente de la base elegida

$$\langle\, x_1, y_1 \,\rangle = \langle\, x_2, y_2 \,\rangle \iff x_1^T A_1\, y_1 = x_2^T A_2\, y_2$$

y teniendo en cuenta que

$$x_1^T = x_2^T P^T \quad \text{y} \quad y_1 = Py_2$$

obtenemos la igualdad

$$x_2^T P^T A_1\, Py_2 = x_2^T A_2\, y_2 \iff x_2^T (P^T A_1\, P)y_2 = x_2^T A_2\, y_2 \implies A_2 = P^T A_1\, P$$

Se dice entonces que las matrices A_1 y A_2 son *congruentes*.

Podríamos ahora responder, sólo en parte, a la pregunta de si es siempre posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de V respecto de la cual el producto escalar sea el canónico.

En efecto, para que así sea, debe verificarse que la matriz de Gram sea la matriz unidad

$$A = (\langle\, u_i, u_j \,\rangle)_{1\le i,j\le n} = I_n$$

es decir, que

$$\left.\begin{array}{ll} \langle\, u_i, u_j \,\rangle = 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle\, u_i, u_i \,\rangle = 1 & \forall\, i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \iff \mathcal{B} \;\text{ es ortonormal}$$

lo que nos permite dar el siguiente resultado.

Teorema 4.9 *Un producto escalar definido sobre un espacio euclídeo $[V, \langle\,\rangle]$ es el producto escalar canónico si, y sólo si, está referido a una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V.*

Podemos entonces replantear la pregunta de la siguiente forma:

> *Dado un espacio euclídeo $[V, \langle\,\rangle]$, ¿es siempre posible encontrar una base ortonormal de V?*

Evidentemente, si la respuesta es sí, habremos probado que siempre es posible encontrar una base respecto de la cual el producto escalar es el canónico.

El siguiente teorema nos responde, no sólo a la pregunta sino que además va a respondernos a la segunda que nos hacíamos, ¿cómo encontrarla?

Teorema 4.10 [Método de ortogonalización de Gram-Schmidt]

Todo espacio vectorial euclídeo $[V, \langle\,\rangle]$ admite una base ortonormal.

Demostración. La demostración del teorema es constructiva, es decir, veamos como a partir de una base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_n\}$ cualquiera de V podemos construir otra base ortonormal $\mathcal{B}^* = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$.

a) A partir de $\mathcal{B}$ vamos a construir primero otra base $\mathcal{B}' = \{w_1,\ w_2, \dots,\ w_n\}$ ortogonal. Para ello tomemos $w_1 = v_1$

   Consideremos $w_2 = v_2 + \alpha_{21} w_1$ con $\langle\, w_1, w_2\,\rangle = 0$. ¿Existe w_2?

   $\langle\, w_1, w_2\,\rangle = \langle\, w_1, v_2 + \alpha_{21} w_1\,\rangle = \langle\, w_1, v_2\,\rangle + \alpha_{21}\langle\, w_1, w_1\,\rangle = 0 \Rightarrow$

   $$\alpha_{21} = -\frac{\langle\, w_1, v_2\,\rangle}{\|w_1\|^2}$$

   ya que $\|w_1\| \neq 0$ por ser $w_1 = v_1 \neq 0$.

   Tomando ahora $w_3 = v_3 + \alpha_{32} w_2 + \alpha_{31} w_1$ con $\langle\, w_1, w_3\,\rangle = \langle\, w_2, w_3\,\rangle = 0$, tenemos

   $$\alpha_{32} = -\frac{\langle\, w_2, v_3\,\rangle}{\|w_2\|^2} \qquad \alpha_{31} = -\frac{\langle\, w_1, v_3\,\rangle}{\|w_1\|^2}$$

   Si hemos calculado, en general $w_1,\ w_2, \dots,\ w_k$, hacemos entonces,

   $$w_{k+1} = v_{k+1} + \alpha_{k+1\,k} w_k + \cdots + \alpha_{k+1\,2} w_2 + \alpha_{k+1\,1} w_1$$

   con la condición $\langle\, w_{k+1}, w_i\,\rangle = 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots,\ k$, obteniéndose:

   $$\alpha_{k+1\,i} = -\frac{\langle\, w_i, v_{k+1}\,\rangle}{\|w_i\|^2} \quad i = 1,\ 2, \dots,\ k$$

   Se obtiene así la base ortogonal $\mathcal{B}'\{w_1,\ w_2, \dots,\ w_n\}$.

b) A partir de $\mathcal{B}'$ vamos a construir la base $\mathcal{B}^* = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ ortonormal.

Para ello, $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$ lo que implica que $\|u_i\| = 1 \quad i = 1,\ 2, \dots,\ n$ y por tanto

$$\begin{cases} \langle\, u_i, u_j \,\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ \langle\, u_i, u_i \,\rangle = 1 \end{cases}$$

por lo que $\mathcal{B}^*$ es una base ortonormal de V. ■

Ejemplo 4.2 Sea $[V,\ \langle\ \rangle]$ un espacio vectorial euclídeo y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz del producto escalar asociada a la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} = \{(1, -1), (2, 0)\}$ de V.

a) Tomamos, en primer lugar $w_1 = v_1$ y hacemos

$$w_2 = v_2 + \lambda w_1$$

con la condición de que $w_2 \perp w_1$, es decir

$$\langle\, v_2 + \lambda w_1, w_1 \,\rangle = \langle\, v_2, w_1 \,\rangle + \lambda \langle\, w_1, w_1 \,\rangle = 0$$

Dado que

$$\left.\begin{array}{l} \langle\, v_2, w_1 \,\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \\ \\ \langle\, w_1, w_1 \,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda = -1 \implies w_2 = v_2 - w_1 = (1, 1)$$

b) Normalizando los vectores obtenemos

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{\sqrt{\langle\, w_1, w_1 \,\rangle}} = \frac{w_1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$$

$$\langle\, w_2, w_2 \,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{w_2}{\sqrt{\langle\, w_2, w_2 \,\rangle}} = \frac{w_2}{\sqrt{6}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Por lo que

$$\mathcal{B}^* = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\}$$

es una base ortonormal de V.

Obsérvese ahora que dado que la matriz de paso de la base $\mathcal{B}^*$ a la base $\mathcal{B}$ es $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ la matriz del producto escalar referida a la base $\mathcal{B}^*$ viene dada por

$$\begin{aligned} P^T A\, P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, se trata del producto escalar canónico. □

4.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1 Se considera, en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que:

$$\begin{array}{lll} \langle e_1, e_1 \rangle = 2 & \langle e_1, e_2 \rangle = 0 & \langle e_1, e_3 \rangle = 1 \\ \langle e_2, e_2 \rangle = 1 & \langle e_2, e_3 \rangle = -1 & \langle e_3, e_3 \rangle = 2 \end{array}$$

a) Hallar la matriz de dicho producto escalar respecto de la base B.

b) A partir de $B' = \{(1,1,1), (0,1,-1), (0,2,0)\}$ de $\mathbf{R}^3$ hallar una base ortonormal.

SOLUCIÓN:

a) La matriz de Gram es

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_1, e_3 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Denotemos por v'_1, v'_2 y v'_3 a los vectores de la base B' y vamos, en primer lugar, a ortogonalizarlos por el método de Gram-Schmidt (después los normalizaremos).

$$u'_1 = v_1 = (1, 1, 1)$$

$$u'_2 = v'_2 + \lambda u'_1 \quad \text{con} \quad u'_2 \perp u'_1 \implies \lambda = -\frac{\langle\, v'_2, u'_1 \,\rangle}{\langle\, u'_1, u'_1 \,\rangle}$$

$$\langle\, v'_2, u'_1 \,\rangle = (0 \quad 1 \ -1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\langle\, u'_1, u'_1 \,\rangle = (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$u'_2 = v'_2 + \lambda u'_1 = (0, 1, -1) + \frac{2}{5}(1, 1, 1) = -\frac{1}{5}(2, 7, -3) \sim (2, 7, -3)$$

$$u'_3 = v'_3 + \lambda u'_1 + \mu u'_2 \ \text{ con} \begin{cases} u'_3 \perp u'_1 \implies \lambda = -\dfrac{\langle\, v'_3, u'_1 \,\rangle}{\langle\, u'_1, u'_1 \,\rangle} \\[2ex] u'_3 \perp u'_2 \implies \mu = -\dfrac{\langle\, v'_3, u'_2 \,\rangle}{\langle\, u'_2, u'_2 \,\rangle} \end{cases}$$

$$\langle\, v'_3, u'_1 \,\rangle = (0 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda = 0$$

$$\langle\, v'_3, u'_2 \,\rangle = (0 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 20$$

$$\langle\, u'_2, u'_2 \,\rangle = (2 \quad 7 \ -3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 105$$

$$u'_3 = v'_3 + \lambda u'_1 + \mu u'_2 = (0, 2, 0) - \frac{20}{105}(2, 7, -3) =$$
$$= -\frac{10}{105}(4, -7, -6) \sim (4, -7, -6)$$

$$\|u'_1\| = \sqrt{\langle\, u'_1, u'_1 \,\rangle} = \sqrt{5}$$
$$\|u'_2\| = \sqrt{\langle\, u'_2, u'_2 \,\rangle} = \sqrt{105}$$

$$\langle u'_3, u'_3 \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = 21$$

$$\|u'_3\| = \sqrt{\langle u'_3, u'_3 \rangle} = \sqrt{21}$$

Normalizando los vectores obtenemos

$$u_1 = \frac{u'_1}{\|u'_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$
$$u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|} = (\frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, \frac{-3}{\sqrt{105}})$$
$$u_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|} = (\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-7}{\sqrt{21}}, \frac{-6}{\sqrt{21}})$$

por lo que la base ortonormal buscada es

$$\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, \frac{-3}{\sqrt{105}}), (\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-7}{\sqrt{21}}, \frac{-6}{\sqrt{21}})\}$$

■

Ejercicio 4.2 En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^4$, con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

se considera el subespacio

$$L =< (1, 0, -1, 0), (0, 2, 3, 1) >$$

Determinar el subespacio ortogonal de L.

Solución: $L^\perp$ está constituido por todos los vectores de $\mathbf{R}^4$ ortogonales a los de L, lo que equivale a decir que es ortogonal a los vectores de la base de L, por lo que

$$L^\perp = \{x \in \mathbf{R}^4 \ : \ x \perp (1, 0, -1, 0) \ \text{ y } \ x \perp (0, 2, 3, 1)\}$$

La matriz del producto escalar viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones implícitas de $L^\perp$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L^\perp \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 4.3 Sea V un espacio euclídeo de dimensión tres y consideremos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ en la que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_1\| = 1, \; \|u_2\| = 1, \; \|u_3\|^2 = 5 \\ \\ \langle\, u_1, u_2 \,\rangle = 0 \\ \\ \text{el vector } 2u_1 - u_3 \text{ es ortogonal a los vectores } u_1 \text{ y } u_2. \end{array} \right.$$

Calcular:

a) La matriz del producto escalar, respecto de la base B.

b) Una base ortonormal de V, asociada a la base B.

SOLUCIÓN:

a)
$$\begin{array}{l} \langle\, u_1, u_1 \,\rangle = \|u_1\|^2 = 1 \\ \langle\, u_1, u_2 \,\rangle = 0 \\ \langle\, 2u_1 - u_3, u_1 \,\rangle = 0 \implies 2\langle\, u_1, u_1 \,\rangle - \langle\, u_3, u_1 \,\rangle = 0 \implies \langle\, u_1, u_3 \,\rangle = 2 \\ \langle\, u_2, u_2 \,\rangle = \|u_2\|^2 = 1 \\ \langle\, 2u_1 - u_3, u_2 \,\rangle = 0 \implies 2\langle\, u_1, u_2 \,\rangle - \langle\, u_3, u_2 \,\rangle = 0 \implies \langle\, u_2, u_3 \,\rangle = 0 \\ \langle\, u_3, u_3 \,\rangle = \|u_3\|^2 = 5 \end{array}$$

por lo que la matriz de Gram del producto escalar es

$$A = \begin{pmatrix} \langle\, e_1, e_1 \,\rangle & \langle\, e_1, e_2 \,\rangle & \langle\, e_1, e_3 \,\rangle \\ \langle\, e_1, e_2 \,\rangle & \langle\, e_2, e_2 \,\rangle & \langle\, e_2, e_3 \,\rangle \\ \langle\, e_1, e_3 \,\rangle & \langle\, e_2, e_3 \,\rangle & \langle\, e_3, e_3 \,\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = u_1$$

$$v_2' = u_2 + \lambda v_1 \quad \text{con} \quad v_2' \perp v_1 \implies \lambda = -\frac{\langle\, u_2, v_1 \,\rangle}{\langle\, v_1, v_1 \,\rangle} = -\frac{0}{1} = 0 \implies$$

$$v_2' = u_2 + 0 \cdot v_1 = u_2 \implies v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{u_2}{\|u_2\|} = u_2$$

$v_3' = u_3 + \lambda\, v_1 + \mu\, v_2$ con

$$\begin{cases} v_3' \perp v_1 \implies \lambda = -\dfrac{\langle\, u_3, v_1 \,\rangle}{\langle\, v_1, v_1 \,\rangle} = -\dfrac{\langle\, u_3, u_1 \,\rangle}{\langle\, u_1, u_1 \,\rangle} = -\dfrac{2}{1} = -2 \\ v_3' \perp v_2 \implies \mu = -\dfrac{\langle\, u_3, v_2 \,\rangle}{\langle\, v_2, v_2 \,\rangle} = -\dfrac{\langle\, u_3, u_2 \,\rangle}{\langle\, u_2, u_2 \,\rangle} = 0 \end{cases}$$

por lo que

$$v_3' = u_3 - 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = u_3 - 2u_1$$

$$\begin{aligned} \|v_3'\|^2 &= \langle\, v_3', v_3' \,\rangle = \langle\, u_3 - 2u_1, u_3 - 2u_1 \,\rangle = \\ &= \langle\, u_3, u_3 \,\rangle - 4\langle\, u_1, u_3 \,\rangle + 4\langle\, u_1, u_1 \,\rangle = 1 \end{aligned}$$

por lo que

$$v_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = v_3$$

y la base buscada es

$$\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3 - 2u_1\}$$

■

Ejercicio 4.4 Dada la forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ definida por

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \alpha x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$$

a) Calcular α para que sea un producto escalar.

b) Para $\alpha = 3$, hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

c) Para $\alpha = 3$, $L \equiv x_1 - x_2 = 0$ y $M \equiv x_2 - x_3 = 0$, hallar una variedad lineal de dimensión 2 que contenga a $L^\perp$ y a $M^\perp$.

SOLUCIÓN:

a) La expresión de la forma bilineal en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

y se tratará de un producto escalar si la matriz es simétrica y definida positiva.

Simétrica siempre lo es y para que sea definida positiva ha de verificarse que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1 > 0 \implies \alpha > 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2 > 0 \implies \alpha > 2$$

por lo que *se tratará de un producto escalar si* $\alpha > 2$.

b) Para $\alpha = 3$, la matriz del producto escalar es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = e_1 = (1, 0, 0)$$

$$u_2 = e_1 + \lambda u_1 \quad \text{con} \quad u_2 \perp u_1 \implies \lambda = -\frac{\langle e_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = -\frac{e_2^T A u_1}{u_1^T A u_1} = -1$$

$$u_2 = e_2 - u_1 = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0) \sim (1, -1, 0)$$

$$u_3 = e_3 + \lambda u_1 + \mu u_2 \quad \text{con}$$

$$\begin{cases} u_3 \perp u_1 \implies \lambda = -\dfrac{\langle e_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = -\dfrac{u_1^T A e_3}{u_1^T A u_1} = 0 \\[2ex] u_3 \perp u_2 \implies \mu = -\dfrac{\langle e_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = -\dfrac{u_2^T A e_3}{u_2^T A u_2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_3 = e_3 - \frac{1}{2} u_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \frac{1}{2}(-1, 1, 2) \sim (1, -1, -2)$$

Normalizamos ahora los vectores ortogonales obtenidos:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^T A u_1}} = \frac{u_1}{1} = (1,0,0)$$
$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^T A u_2}} = \frac{u_2}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$
$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^T A u_3}} = \frac{u_3}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}})$$

Una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ es, por tanto

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), ({}^1\!/\!\sqrt{2}, {}^{-1}\!/\!\sqrt{2}, 0), ({}^1\!/\!\sqrt{2}, {}^{-1}\!/\!\sqrt{2}, {}^{-2}\!/\!\sqrt{2})\}$$

c)
$$L \equiv x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow \mathcal{B}_L = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$$
$$M \equiv x_2 - x_3 = 0 \Longrightarrow \mathcal{B}_M = \{(1,0,0), (0,1,1)\}$$

Un vector pertenecerá a la variedad $L^\perp$ ortogonal a L si es ortogonal a los vectores de su base, por lo que las ecuaciones implícitas de L^T serán

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L^T \equiv \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff L^T \equiv \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sus ecuaciones paramétricas son

$$x_1 = -3\lambda \quad x_2 = 2\lambda \quad x_3 = 2\lambda$$

y una base de L^T es $\mathcal{B}_{L^T} = \{(-3, 2, 2)\}$.

Repitiendo el proceso para la variedad M obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$M^T \equiv \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff M^T \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

y una base de M^T es $\mathcal{B}_{M^T} = \{(0, 0, 1)\}$.

La variedad $L^T + M^T$ las contiene a ambas y un sistema generador de ella es el constituido por la unión de las bases de $L^\perp$ y $M^\perp$, es decir

$$\{(-3, 2, 2), (0, 0, 1)\}$$

y al ser linealmente independientes constituyen una base, por lo que

$$\dim(L^T + M^T) = 2$$

Así pues, la variedad buscada es

$$L^T + M^T =< (-3, 2, 2), (0, 0, 1) > \qquad \blacksquare$$

4.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.5 Dado, en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, el producto escalar cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizando el método de Gram-Schmidt, obtener una base ortonormal asociada a la base $\{e_1 + e_2,\ e_2,\ e_1 + e_3\}$.

Sol: $\mathcal{B} = \{(1/2, 1/2, 0), (-1/2, 1/2, 0), (1, 1, -1)\}$.

Ejercicio 4.6 Dado un producto escalar en $\mathbf{R}^3$, cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la variedad lineal ortogonal a $L =< (1, 1, 0), (0, 1, -1) >$.

b) Encontrar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Sol:

a) $L^\perp =< (1, -2, 0) >$

b) $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}, 0)\}$.

Ejercicio 4.7 Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{x^2, x, 1\}$ su base canónica.

Se considera el producto escalar definido por: $\langle\, e_i, e_j \,\rangle = \dfrac{1}{i+j+1}$. Se pide:

a) El ángulo de los vectores 1 *y* x.

b) Estudiar, para qué valores de a, son ortogonales $x + a$ y $x - a$.

c) Ortonormalizar la base B.

Sol: $\arccos \dfrac{\sqrt{35}}{6}$, $\ a = \pm\sqrt{7/5}$, $\ \{3x^2,\ 15x^2 - 20x,\ 42x^2 - 140x + 105\}$.

Ejercicio 4.8 En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, respecto de una base ortonormal, se consideran el vector $a = (1, 1, 1)$ y el subespacio $H \equiv 6x = 4y = 3z$.

a) Obtener una base ortonormal de $H^\perp$.

b) Expresar a como $x + y$ donde $x \in H$, $y \in H^\perp$.

Sol: a) $\{(3/\sqrt{145}, -10/\sqrt{145}, 6/\sqrt{145}), (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5})\}$

b) $x = (18/29, 27/29, 36/29)\quad y = (11/29, 2/29, -7/29)$.

Ejercicio 4.9 Se considera el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ con el producto escalar que respecto a la base canónica tiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor de a para que los vectores $(1, 2, a)$ y $(a, -1, 1)$ sean ortogonales.

b) Si L es la variedad lineal de ecuaciones $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, hallar unas ecuaciones implícitas de $L^\perp$.

c) Dado el vector $v = (3, 1, -1)$, descomponerlo en suma de dos vectores, uno de L y otro de $L^\perp$.

d) Obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_1 \in L^\perp$.

Sol:

a) a=1.

b) $L^{\perp} \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $v = (2,2,0) + (1,-1,-1)$ con $(2,2,0) \in L$ y $(1,-1,-1) \in L^{\perp}$.

d) $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (2/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15}, 1/\sqrt{15}), (1/\sqrt{15}, -2/\sqrt{15}, 3/\sqrt{15})\}$.

Ejercicio 4.10 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_2)$$

y sea L la variedad lineal

$$L \equiv \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Si se define en $\mathbf{R}^3$ el producto escalar cuya matriz, respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Descomponer el vector $(3,3,3)$ en suma de uno de $f(L)$ y otro de $[f(L)]^{\perp}$.

b) Determinar las variedades $L^{\perp} + f(L)$ y $L^{\perp} \cap f(L)$.

Sol: $(3,3,3) = (-3,3,-3) + (6,0,6)$, $L^{\perp} + f(L) = \mathbf{R}^3$, $L^{\perp} \cap f(L) = \{0\}$.

Ejercicio 4.11 Sea f una forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz, respecto de la base canónica, es

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor de α para que f sea un producto escalar.

b) Determinar α para que además, los vectores $u = (1,1,1)$ y $v = (0,3,-1)$ sean ortogonales.

c) Para el valor de α calculado anteriormente, determinar la variedad ortogonal a la variedad lineal L definida por $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

d) A partir de las bases de L y $L^{\perp}$, obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Sol:

a) $\alpha > 1$.

b) $\alpha = 2$.

c) $L^{\perp} =< (1, 0, -2) >$.

d) $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 3/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/2\sqrt{3}, 0, -1/2\sqrt{3})\}$.

Ejercicio 4.12 En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ se considera la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y se sabe que

$$\langle\, u_i, u_j \,\rangle = \frac{1}{i + j - 1} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

a) Dada la variedad lineal $L \equiv x_1 + x_2 = 0$, encontrar $L^{\perp}$.

b) Hallar una base ortonormal aplicando Gram-Schmidt a la base B.

Sol:

a) $L^{\perp} \equiv \left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 0 \end{array} \right.$

b) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0), (\sqrt{5}, -6\sqrt{5}, 6\sqrt{5})\}$.

Ejercicio 4.13 En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ y respecto a una base ortonormal se consideran las variedades lineales:

$$L_1 \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad\qquad L_2 \equiv x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$$

a) Hallar α y β sabiendo que L_1 es ortogonal a L_2.

b) Obtener dos bases B_1 de L_1 y B_2 de L_2, tales que su unión $B = B_1 \cup B_2$ sea una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

c) Utilizando la base B del apartado anterior, construir razonadamente una transformación ortogonal f de $\mathbf{R}^3$ tal que $f(L_1) \subseteq L_2$. ¿Se podría hallar si la condición fuese $f(L_2) \subseteq L_1$?

d) Demostrar que si g es una transformación ortogonal de $\mathbf{R}^3$ y u es un vector de $\mathbf{R}^3$ tal que $\{u, g(u), g^2(u)\}$ es una base ortonormal, entonces $g^3(u) = u$ ó $g^3(u) = -u$.

Sol:

a) $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

b) $B_1 = \{u_1\} = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$
$B_2 = \{u_2, u_3\} = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})\}$

c) $f(u_1) = u_2,\ f(u_2) = u_3,\ f(u_3) = u_1 \implies f(L_1) \subseteq L2$, no es posible en el otro caso.

d) Observar que $A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ e imponer la condición de que sea ortogonal.

Ejercicio 4.14 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^3$:

$$L \equiv x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad \text{y} \quad L' \equiv \begin{cases} 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Sea b una forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Calcular a para que b sea un producto escalar.

b) Hallar a para que las variedades L y L' sean ortogonales.

c) Base y ecuaciones implícitas de $L^\perp$.

d) A partir de las bases de L y $L^\perp$, obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Sol:

a) $a > 0$.

b) $a = 1$.

c) $L^\perp \equiv \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{B}_{L^\perp} = \{(-4a, 5a, 2)\}$.

Ejercicio 4.15 Se considera en $\mathbf{R}^3$ la forma bilineal simétrica cuya matriz, respecto de la base canónica, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de a se trata de un producto escalar?

b) Calcular a sabiendo que, además, las variedades

$$L \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L' \equiv x_2 - 2x_3 = 0$$

son ortogonales.

c) Obtener, para el valor de a obtenido en el apartado anterior, y a partir de L y L', una base ortonormal B de $\mathbf{R}^3$.

Sol:

a) $a > 1$.

b) $a = 2$.

c) $B = \{(0, 0, {}^{1}\!/\!_{\sqrt{2}}), (1, 0, 0,), ({}^{-2}\!/\!_{\sqrt{2}}, {}^{2}\!/\!_{\sqrt{2}}, {}^{1}\!/\!_{\sqrt{2}})\}$.

5. Autovalores y autovectores

5.1 Definiciones y propiedades

Sea $T \in \mathrm{End}(V)$ donde V es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

Definición 5.1 [Autovalores y autovectores]

Se dice que $\lambda \in \mathbf{K}$ es un autovalor o valor propio de la transformación T si existe algún vector no nulo $x \in V$ tal que $T(x) = \lambda x$. A dicho vector x no nulo se le denomina autovector o vector propio de T asociado al autovalor λ.

Teorema 5.1 *Todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo poseen los mismos autovalores.*

Demostración. Sean A y A' dos matrices asociadas a $T \in \mathrm{End}(V)$ respecto a dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V respectivamente.

Sabemos que la relación que existe entre A y A' viene dada por

$$A' = P^{-1}AP$$

donde P representa a la matriz no singular del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Si λ es un autovalor de A $\Longrightarrow \exists\, x \in V,\ x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$.

$$A = PA'P^{-1} \implies \lambda x = Ax = (PA'P^{-1})x = PA'(P^{-1}x) \implies$$

$$P^{-1}(\lambda x) = A'(P^{-1}x) \implies \lambda(P^{-1}x) = A'(P^{-1}x)$$

Llamando $y = P^{-1}x$ tenemos que $A'y = \lambda y$.

Al ser $x \neq 0 \implies y = P^{-1}x \neq 0$ y por tanto, *λ es un autovalor de A'*.

Recíprocamente, *si λ es un autovalor de A'* existe un vector $x \neq 0$ tal que $A'x = \lambda x$ y por tanto,

$$\lambda x = A'x = P^{-1}APx \implies P\lambda x = APx \implies A(Px) = \lambda(Px) \text{ con } Px \neq 0$$

por lo que *λ es un autovalor de A*. ∎

Teorema 5.2 *Sea A una matriz asociada a $T \in \mathrm{End}(V)$. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) Si λ es un autovalor de A, el conjunto $V_\lambda = \{x \in V \ : \ Ax = \lambda x\}$ es un subespacio vectorial de V denominado subespacio propio de A asociado al autovalor λ.

b) Los subespacios propios asociados a autovalores diferentes son disjuntos.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$$

c) Autovectores asociados a autovalores diferentes son linealmente independientes.

Demostración.

a) $\forall\, x, y \in V_\lambda$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K} \implies$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y) \implies$$

$$\alpha x + \beta y \in V_\lambda \implies V_\lambda \text{ es un subespacio vectorial de } V.$$

b)

$$x \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in V_{\lambda_1} \implies Ax = \lambda_1 x \\ \text{y} \\ x \in V_{\lambda_2} \implies Ax = \lambda_2 x \end{array} \right. \implies$$

$$\lambda_1 x = \lambda_2 x \implies (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0 \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \implies x = 0 \implies$$

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}.$$

c) Lo demostraremos por inducción en r.

- Si $r = 1$ sólo tenemos x_1 que por ser autovector asociado a λ_1 es $x_1 \neq 0$ y por tanto, $\{x_1\}$ es un sistema libre.

- Supongamos la propiedad cierta hasta $r-1$ y probémosla para r.

  Es decir, supongamos que $x_1, \dots, x_{r-1}$ son linealmente independientes y probemos que $x_1, \dots, x_{r-1}, x_r$ también lo son.

  De la combinación lineal:

  $$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{r-1} x_{r-1} + \alpha_r x_r = 0 \tag{5.1}$$

  se tiene que

  $$A \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A x_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$$

  $$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} x_{r-1} + \alpha_r \lambda_r x_r = 0 \tag{5.2}$$

  Multiplicando la ecuación (5.1) por λ_r obtenemos:

  $$\alpha_1 \lambda_r x_1 + \cdots + \alpha_{r-1} \lambda_r x_{r-1} + \alpha_r \lambda_r x_r = 0 \tag{5.3}$$

  y restando la ecuación (5.3) a la ecuación (5.2) obtenemos

  $$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \cdots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_{r-1} = 0$$

  Al ser, por hipótesis de inducción, $x_1, \dots, x_{r-1}$ linealmente independientes, se tiene que

  $$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) = 0, \;\cdots\;, \quad \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$$

  $$\lambda_i \neq \lambda_j \;\text{ si } i \neq j \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$$

  que llevados a la ecuación (5.1) nos queda

  $$\alpha_r x_r = 0 \;\text{ con }\; x_r \neq 0 \implies \alpha_r = 0$$

  Es decir,

  $$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{r-1} x_{r-1} + \alpha_r x_r = 0 \implies \alpha_i = 0 \; 1 \leq i \leq r$$

  Por tanto, $x_1, \dots, x_{r-1}, x_r$ son linealmente independientes. ■

De las propiedades anteriores se deduce el siguiente resultado:

Proposición 5.3 *Si los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son todos distintos, la suma $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ es directa.*

Propiedades de los autovalores

a) *λ es un autovalor de A si, y sólo si,* $\det(\lambda I - A) = 0$.

- *Si λ es autovalor de A*

  $$\exists\, \overline{x} \in V \quad \overline{x} \neq 0 \ \text{ tal que } \ A\overline{x} = \lambda\overline{x} \implies (\lambda I - A)\overline{x} = 0$$

  Es decir, el sistema $(\lambda I - A)x = 0$ admite solución $\overline{x}$ no trivial y por tanto, la matriz del sistema es singular.

  $$\det(\lambda I - A) = 0$$

- *Si* $\det(\lambda I - A) = 0$

  El sistema $(\lambda I - A)x = 0$ admite solución $\overline{x}$ no trivial, por lo que

  $$(\lambda I - A)\overline{x} = 0 \implies A\overline{x} = \lambda\overline{x} \implies \lambda \ \textit{ es autovalor de } A.$$

b) *A admite el autovalor nulo si, y sólo si, el endomorfismo T al que representa es no inyectivo.*

- *Si $\lambda = 0$ es autovalor de A*

  $$\exists\, x \neq 0 \ \text{ tal que } \ Ax = 0x = 0 \iff T(x) = 0 \implies$$

  $$\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\} \implies T \textit{ no es inyectivo}.$$

- *Si T no es inyectivo*

  $$\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\} \implies \exists\, x \neq 0 \ \text{ tal que } \ T(x) = 0 \implies$$

  $$Ax = 0 \iff Ax = 0x \implies A \textit{ admite el autovalor nulo}.$$

c) *Si λ es autovalor de A asociado al autovector x, $\lambda - k$ lo es de $A - kI$ asociado al mismo autovector x.*

Si λ es autovalor de A se verifica que

$$Ax = \lambda x \implies Ax - kx = \lambda x - kx \implies (A - kI)x = (\lambda - k)x \implies$$

$\lambda - k$ es un autovalor de $A - kI$ asociado al autovector x.

d) *Si λ es un autovalor de A asociado al autovector x, λ^m es autovalor A^m asociado al mismo autovector x cualquiera que sea $m \in \mathbf{N}$.*

$$\lambda \text{ autovalor de } A \text{ asociado a } x \implies Ax = \lambda x \implies$$

$$\begin{aligned}
&A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x\\
&A^3x = A(A^2x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2(Ax) = \lambda^2(\lambda x) = \lambda^3 x\\
&\vdots\\
&A^mx = A(A^{m-1}x) = A(\lambda^{m-1}x) = \lambda^{m-1}(Ax) = \lambda^{m-1}(\lambda x) = \lambda^m x
\end{aligned}$$

por lo que λ^m es autovalor de A^m asociado al autovector x cualquiera que sea $m \in \mathbf{N}$.

e) *λ es autovalor de A si, y sólo si, el endomorfismo $\lambda I - T$, cuya matriz asociada es $\lambda I - T$, es no inyectivo.*

Es consecuencia directa de la segunda y tercera propiedad.

Como consecuencia tenemos que:

- $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$
- Las ecuaciones del subespacio propio V_λ se obtienen del sistema homogéneo
$$(\lambda I - A)x = 0$$
y por tanto
$$\dim V = n \implies \dim V_\lambda = n - \operatorname{rg}(\lambda I - A)$$

Ejemplo 5.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 6$ es un autovalor asociado al autovector $x = (1, 1/6, 2/3)$ ya que

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1/6\\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ 1\\ 4 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1\\ 1/6\\ 2/3 \end{pmatrix} \iff Ax = 6x$$

El subespacio propio asociado al autovalor 6 viene dado por las soluciones del sistema

$$(6I - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 6\lambda \\ x_2 = \ \ \lambda \\ x_3 = 4\lambda \end{cases}$$

$$V_6 = <(6, 1, 4)> \qquad \square$$

¿Cómo podemos determinar cuáles son los autovalores de una matriz cuadrada A?

Teniendo en cuenta la primera de las propiedades de los autovalores, vamos a ver que los autovalores vienen dados a través de las raíces del denominado *polinomio característico* de la matriz.

5.2 Polinomio característico de una matriz.

Definición 5.2 [Polinomio característico]

Se denomina polinomio característico de una matriz $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ al polinomio de grado n que se obtiene desarrollando el determinante de la matriz $\lambda I - A$.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

La ecuación $p(\lambda) = 0$ se denomina ecuación característica.

Teorema 5.4 *Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si A y B son dos matrices semejantes, existe una matriz P, no singular, tal que

$$B = P^{-1}AP \implies \lambda I - B = P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P \implies$$

$$\det(\lambda I - B) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det P^{-1}\ \det(\lambda I - A)\ \det P$$

$$\det P^{-1} = \frac{1}{\det P} \implies \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$$

por lo que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. ■

Análogamente, se denomina *polinomio característico* de una transformación T de V al polinomio de grado $n = \dim V$ que se obtiene desarrollando el determinante de la matriz $\lambda I - A$, donde A es una representación cualquiera de la transformación T.

Corolario 5.5 *El polinomio característico de una transformación no depende de la matriz representación que se tome.*

Demostración. Si A y B son dos matrices que representan a la misma transformación T, sabemos que son semejantes y por el Teorema 5.4 tienen el mismo polinomio característico. ■

Teorema 5.6 *Los autovalores de una matriz son las raíces de su polinomio característico.*

Demostración. Es consecuencia directa de la primera propiedad de los autovalores. ■

Una consecuencia inmediata de los resultados anteriores es que tanto los autovalores como los autovectores son valores intrínsecos de la transformación y no dependen de la matriz que la represente, es decir, no dependen de la base que se tome del espacio V.

Ejemplo 5.2 Imaginemos en el plano real $\mathbf{R}^2$ una transformación que consiste en reflejar un vector tomando como eje de reflexión (como espejo) una dirección determinada.

Supongamos que, respecto de la base canónica, el eje de reflexión (el espejo) es la dirección del eje OY, es decir la dirección del vector $(0, 1)$ (véase la Figura 5.1).

Podemos observar que todos los vectores proporcionales al $(0, 1)$, es decir, situados en el eje OY se quedan invariantes, mientras que todos los situados en el eje OX (proporcionales al $(1, 0)$) se transforman en su opuesto.

Se tiene por tanto que

$$f(0, y) = (0, y) = 1 \cdot (0, y) \qquad\qquad f(x, 0) = (-x, 0) = -1 \cdot (x, 0)$$

es decir, la reflexión que hemos definido tiene dos autovalores

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

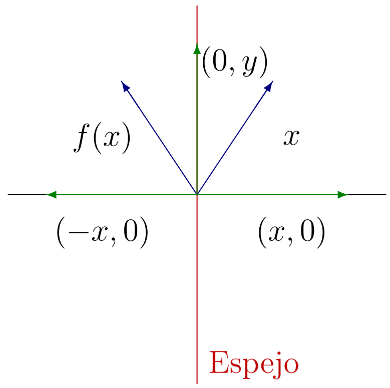

Figura 5.1: Una reflexión de eje OY

y las variedades propias asociadas son, respectivamente

$$V_1 = <(0,1)> \quad \text{y} \quad V_2 = <(1,0)>$$

Tomemos ahora como base de $\mathbf{R}^2$ las direcciones de las bisectrices de los cuadrantes (véase la Figura 5.2).

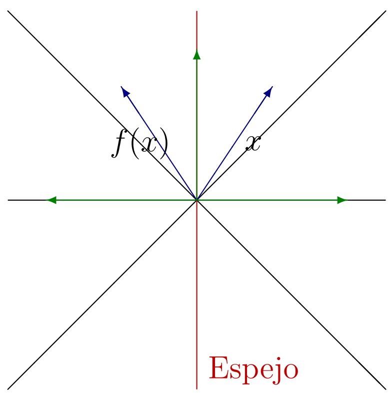

Figura 5.2: La misma reflexión cambiando los ejes.

¿Qué hemos cambiado?

El eje de reflexión sigue siendo el mismo que antes, sólo que ahora no viene determinado por la dirección $(0,1)$ sino por la $(1,1)$ o para ser más precisos, por la $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ que son las coordenadas del antiguo vector $(0,1)$ respecto al nuevo sistema de referencia.

Los vectores proporcionales al $(1,1)$ seguirán quedándose invariantes mientras que los proporcionales al $(1,-1)$ se transformarán en su opuesto, es decir

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1$$

y las variedades propias asociadas son, respectivamente

$$V_1 = <(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)> \quad \text{y} \quad V_2 = <(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)>$$

En resumen, *los autovalores son los mismos*, y *los autovectores también son los mismos*, lo único que ha cambiado de los autovectores son sus coordenadas porque hemos cambiado de base, pero siguen siendo los mismos vectores. □

Definición 5.3 [Multiplicidad aritmética de un autovalor]

Se define multiplicidad aritmética de un autovalor λ de una matriz A, como la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de A.

Teorema 5.7 *Si la multiplicidad de un autovalor es α, se verifica que*

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq \alpha$$

Teorema 5.8 *Si $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ es el polinomio característico de una matriz A, se tiene que*

$$a_i = (-1)^i \sum M_i(A)$$

donde $M_i(A)$ representan a los menores principales de orden i de la matriz A.

En particular se verifica que:

- *La suma de los autovalores coincide con la traza de la matriz*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{tr } A$$

- *El producto de los autovalores es igual al determinante de la matriz*

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$$

Ejemplo 5.3 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

verifica que

$$a_1 = (-1)^1(1 - 1 + 0) = 0$$

$$a_2 = (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = -1 - 2 - 6 = -9$$

$$a_3 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

El polinomio característico de A es entonces

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda - 4$$ □

5.3 Diagonalización por semejanza

Definición 5.4 [MATRIZ DIAGONALIZABLE]

Una matriz $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ se dice diagonalizable si es semejante a otra matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz $P \in \mathbf{K}^{n\times n}$ no singular tal que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

En este caso se dice que D es una forma diagonal de A y que P es la matriz de paso.

$P^{-1}AP = D \implies AP = PD$ y si P_i representa la columna i-ésima de P tenemos

$$AP_i = d_iP_i \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

por lo que los elementos $d_i \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ de la diagonal de D son los autovalores de la matriz A. Por tanto, salvo reordenación de los elementos diagonales, la matriz D está determinada.

5.3.1 Endomorfismos diagonalizables.

Definición 5.5 *Un endomorfismo $T : V \to V$ se dice diagonalizable si lo es cualquier matriz A representación de T.*

Esta definición no tendría validez de no verificarse el siguiente teorema.

Teorema 5.9 *Si A es una representación diagonalizable de T entonces, cualquier matriz B representación de T es también diagonalizable.*

Demostración. Si A es diagonalizable existe una matriz P, no singular, tal que $P^{-1}AP = D$.

Al ser A y B representaciones de T son semejantes, es decir, existe una matriz Q no singular tal que $A = Q^{-1}BQ$.

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}Q^{-1}BQP = (QP)^{-1}B(QP) \implies$$

B es diagonalizable. ∎

Obsérvese que cuando una matriz A es considerada como una representación de un endomorfismo T, no es válida su diagonalización mediante transformaciones elementales, ya que el sistema de vectores columnas que se obtiene no es equivalente al original, es decir, no genera el mismo espacio vectorial que el sistema original de vectores columnas.

Podemos decir entonces que un endomorfismo $T : V \to V$ es diagonalizable cuando existe una base de V respecto a la cual la matriz asociada a T es diagonal.

Análogamente podemos decir que una matriz cuadrada A es diagonalizable si está asociada a un endomorfismo diagonalizable.

Teorema 5.10 *Sea $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ una matriz con n autovectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_n$ y sea $P = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ la matriz cuyas columnas son dichos autovectores. Entonces $P^{-1}AP = D$ donde D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores de la matriz A.*

Demostración.

$$AP = A(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) = (Ax_1\ Ax_2\ \cdots\ Ax_n) = (\lambda_1 x_1\ \lambda_2 x_2\ \cdots\ \lambda_n x_n) =$$

$$= (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD$$

Como los vectores $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ son linealmente independientes, P es no singular y por tanto invertible. Entonces,

$$AP = PD \implies P^{-1}AP = D. \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que si x es un autovector asociado al autovalor λ, cualquier vector μx proporcional a él sigue siendo autovector de A asociado a λ, por lo que la matriz P no es única, a menos que busquemos una matriz P cuyas columnas tengan todas norma 1.

¿Es siempre diagonalizable una matriz?

La respuesta es NO. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 5.4 El polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es $p(\lambda) = \lambda^2$ por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Los autovectores asociados a su único autovalor $\lambda = 0$ vienen determinados por $Ax = 0x = 0$ por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_2 = 0 \implies x = (x_1, 0) = x_1(1, 0)$$

es decir, no posee dos autovectores linealmente independientes.

Si A fuese diagonalizable su forma diagonal sería

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1} \implies A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

por lo que A no es diagonalizable. $\square$

Como sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, podemos dar el siguiente corolario.

Corolario 5.11 *Toda matriz cuadrada $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ que posea n autovalores distintos es diagonalizable.*

En el Ejemplo 5.4 vimos que A no tenía 2 autovectores linealmente independientes y que no era diagonalizable, pero

> *¿podemos asegurar que si A no posee n autovectores linealmente independientes no es diagonalizable?*

La respuesta, en este caso es SÍ, pero para probarlo debemos ver algunos resultados previos.

Teorema 5.12 [Caracterización de las matrices diagonales]

Una matriz $D \in \mathbf{K}^{n\times n}$ es diagonal si, y sólo si, admite por autovectores a los vectores e_i de la base canónica de $\mathbf{K}^n$. Además, cada e_i es autovector de D asociado al autovalor d_i (elemento i-ésimo de la diagonal).

Demostración.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Longrightarrow De_i = d_i e_i \Longrightarrow$$

d_i es autovalor de D y e_i es un autovector asociado a d_i.

Recíprocamente, si $e_1, \ldots, e_n$ son autovectores de D asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, $De_i = \lambda_i e_i \quad i = 1, \ldots, n$.

Ahora bien, $De_i = i$-ésima columna de D y por tanto

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D \text{ es diagonal.}$$

■

Teorema 5.13 *Toda matriz $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ diagonalizable posee n autovalores, no necesariamente distintos.*

Demostración. Si A es diagonalizable existe una matriz P no singular tal que $P^{-1}AP = D$

Como A y D son semejantes, poseen los mismos autovalores y dado que D tiene n autovalores ($d_i \;\; i = 1, \ldots, n$), A también tiene n autovalores. ∎

Obsérvese que si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, como $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y $\mathbf{R}$ no es un cuerpo algebraicamente cerrado, puede no tener n raíces (reales) y por tanto existirán matrices $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ que no posean n autovalores.

Si trabajamos en $\mathbf{C}$, es decir, si $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, como $\mathbf{C}$ es algebraicamente cerrado, A posee siempre n autovalores. Sin embargo, el teorema anterior nos dice que si A es diagonalizable posee n autovalores pero el recíproco no es cierto.

Nos encontramos ahora en condiciones de dar respuesta a la pregunta que nos planteábamos anteriormente.

Teorema 5.14 [Caracterización de las matrices diagonalizables]

Una matriz $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si, y sólo si, existe una base de $\mathbf{K}^n$ constituida por autovectores de A, es decir, si A admite n autovectores linealmente independientes.

La matriz de paso P tiene por columnas las coordenadas de dichos autovectores.

Demostración. La condición suficiente quedó probada en el Teorema 5.10.

Veamos entonces que si A es diagonalizable posee n autovectores linealmente independientes.

A diagonalizable $\Longrightarrow$ $\exists\, P$ no singular tal que $P^{-1}AP = D$ con D diagonal.

Al ser D diagonal, admite n autovalores ($d_i \;\; i = 1, \ldots,\; n$) y n autovectores linealmente independientes ($e_i \;\; i = 1, \ldots,\; n$, vectores de la base canónica de $\mathbf{K}^n$).

Por ser A y D semejantes poseen el mismo polinomio característico y por tanto, los mismos autovalores con las mismas multiplicidades aritméticas.

Dado que P es no singular

$$\operatorname{rg}(A - d_i I) = \operatorname{rg} P^{-1}(A - d_i I)P = \operatorname{rg}(D - d_i I) \;\Longrightarrow$$

$$\dim V_A(d_i) = n - \operatorname{rg}(A - d_i I) = n - \operatorname{rg}(D - d_i I) = \dim V_D(d_i)$$

es decir, poseen también las mismas multiplicidades geométricas.

Como sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, tenemos que el número de autovectores linealmente independientes de una matriz viene dado por la suma de las multiplicidades geométricas de sus autovalores, es decir, por

$$\sum_{i=1}^{r} \dim V_A(\lambda_i)$$

Al ser $\dim V_A(d_i) = \dim V_D(d_i)$ para $i = 1, \ldots, r$ siendo r el número de autovalores distintos, y dado que D es diagonal se tiene que

$$\sum_{i=1}^{r} \dim V_D(d_i) = n \implies \sum_{i=1}^{r} \dim V_A(d_i) = n$$

es decir, A posee n autovectores linealmente independientes. ■

Corolario 5.15 *Una matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si, y sólo si:*

a) Todos sus autovalores son reales.

b) Para cada autovalor λ de A, la dimensión del subespacio propio V_λ coincide con la multiplicidad del autovalor.

5.3.2 Diagonalización de matrices simétricas.

Hemos visto bajo qué condiciones es diagonalizable una matriz cuadrada. En esta sección veremos que si la matriz considerada es simétrica siempre es diagonalizable y además la matriz de paso puede ser ortogonal. Es decir, toda matriz simétrica puede ser diagonalizada de la forma $D = P^T AP$.

Teorema 5.16 *Los autovalores de una matriz simétrica son todos reales.*

Demostración. Denotemos por A^* a la matriz traspuesta conjugada de A.

Por ser A real y simétrica, es $A = A^*$.

Si λ es un autovector de A y $v \neq 0$ un autovector de A asociado a λ se tiene que $Av = \lambda v$. Entonces:

$$v^*Av = v^*\lambda v \implies (v^*Av)^* = (v^*\lambda v)^* \implies v^*A^*v = v^*\lambda^*v \implies$$

$$v^*Av = v^*\overline{\lambda}v \implies v^*\lambda v = v^*Av = v^*\overline{\lambda}v \implies \lambda v^*v = \overline{\lambda}v^*v \implies (\lambda - \overline{\lambda})v^*v = 0$$

$$v \neq 0 \implies v^*v \neq 0 \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbf{R}.$$ ■

Teorema 5.17 *Autovectores correspondientes a autovalores distintos de una matriz real y simétrica son ortogonales.*

Demostración. Sean v_1 y v_2 autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\left\{\begin{array}{l} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_2^T A v_1 = v_2^T \lambda_1 v_1 \\ \\ v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 v_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1 & (1) \\ \\ v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 & (2) \end{array}\right.$$

Trasponiendo (1) tenemos $v_1^T A v_2 = \lambda_1 v_1^T v_2$ y restándola de (2) se obtiene:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) v_1^T v_2 = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies v_1^T v_2 = 0 \implies v_1$ y v_2 son ortogonales. ∎

Teorema 5.18 *Toda matriz real y simétrica es diagonalizable con una matriz de paso ortogonal.*

Esto es equivalente a decir que si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es simétrica, existe una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$ constituida por autovectores de A.

Obsérvese que la matriz asociada a T respecto de la base $\mathcal{B}$ construida anteriormente es una matriz diagonal D cuyos elementos diagonales son los autovalores de T y la matriz de paso es la formada por los autovectores de T linealmente independientes verificándose además que $P^{-1} = P^T$, es decir, que P es ortogonal. Por tanto,

$$D = P^T A P$$

Para encontrar la matriz de paso P basta encontrar en cada subespacio propio $V(\lambda)$ una base y ortonormalizarla. La unión de las bases así buscadas es la base de $\mathbf{R}^n$ ortonormal de autovectores que nos definen P.

Ejemplo 5.5 Consideremos la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

por lo que sus autovalores son el 2 doble y el 4 simple.

Los autovectores asociados a $\lambda = 2$ vienen dados por las soluciones del sistema

$$(2I - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

$$\text{Para} \begin{cases} \alpha = 1 \quad \beta = 0 \implies v_1 = (1,1,0) \\ \\ \alpha = 0 \quad \beta = 1 \implies v_2 = (0,0,1) \end{cases} \implies V_2 = < v_1, v_2 >$$

Dado que $v_1 \perp v_2$, una base ortonormal de V_2 e la formada por los vectores

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (0,0,1)$$

Los autovectores asociados a $\lambda = 4$ vienen dados por las soluciones del sistema

$$(4I - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo que

$$V_4 = < v_3 > \quad \text{con} \quad v_3 = (1, -1, 0)$$

Una base ortonormal de V_3 viene dada por el vector

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

Una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ constituida por autovectores de A es la unión de las bases obtenidas, es decir

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

por lo que $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $P^{-1} = P^T$ es decir, P ortogonal.

Se verifica entonces que

$$P^T A P = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\square$

5.3.3 Aplicaciones de la diagonalización.

- Potencias de matrices

  Si A es una matriz diagonalizable, existe otra matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D \implies A = PDP^{-1}$. Entonces:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \overset{m}{\cdots} PDP^{-1} = PD^mP^{-1} \implies$$

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

- Inversa de una matriz

  $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

  Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \implies D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix} \implies$

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

5.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1 Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

no son semejantes, pero poseen los mismos autovalores.

Solución: Los polinomios característicos son

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

$$p_B(\lambda) = |\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

por lo que *ambas tienen los mismos autovalores*, 1 simple y -1 doble.

Para $\lambda = -1$, los autovectores de A vienen dados por

$$(-I - A)x = 0 \implies \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \implies (0, 0, 1)$$

es decir, no admite una base de autovectores y por tanto, no es diagonalizable, mientras que B si lo es (ya es una matriz diagonal), por lo que *A y B no son semejantes*. ■

Ejercicio 5.2 Sabiendo que $v_1 = (0, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (1, 0, -1)$ son los vectores propios de una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, determinar la matriz asociada a dicha aplicación sabiendo que su primera columna es $(1\ 2\ 3)^T$.

Solución: Sabemos que $A(v_1\ v_2\ v_3) = (\lambda_1 v_1\ \ \lambda_2 v_2\ \ \lambda_3 v_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \alpha \\ 2 & b & \beta \\ 3 & c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & 1-a & 1-\alpha \\ b+\beta & 2-b & 2-\beta \\ c+\gamma & 3-c & 3-\gamma \end{pmatrix}$$

Se debe verificar entonces que

$$\begin{aligned} a + \alpha &= 0 \\ \frac{b+\beta}{1} = \frac{c+\gamma}{1} &\implies b + \beta = c + \gamma \\ \frac{1-a}{1} = \frac{2-b}{-1} &\implies a + b = 3 \\ 3 - c = 0 &\implies c = 3 \\ \frac{1-\alpha}{1} = \frac{3-\gamma}{-1} &\implies \alpha + \gamma = 4 \\ 2 - \beta = 0 &\implies \beta = 2 \end{aligned}$$

El sistema obtenido de 6 ecuaciones con 6 incógnitas nos da como solución

$$a = -1,\ b = 4,\ c = 3,\ \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3$$

por lo que la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

■

Ejercicio 5.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar sus autovalores y autovectores.

b) Calcular a para que sea diagonalizable, obteniendo su matriz diagonal y una matriz de paso.

SOLUCIÓN:

a) El polinomio característico es

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

por lo que *sus autovalores son* 1 *doble y* -1 *doble*.

Para $\lambda = 1$, sus autovectores verifican que $(A - I)x = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ax_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

por lo que

- *Si* $a \neq 0$ *sólo tiene el autovector* $(1, 0, 0, 0)$.
- *Si* $a = 0$ *obtenemos los autovectores* $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$.

Para $\lambda = -1$ con $a = 0$ (si $a \neq 0$ ya sabemos que no es diagonalizable), sus autovectores verifican que $(A + I)x = 0$, por lo que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\mu \\ x_2 = -\lambda - 2\mu \\ x_3 = 2\lambda \\ x_4 = 2\mu \end{cases}$$

obteniéndose los autovectores

$$(0, 1, -2, 0), \ (1, 2, 0, -2)$$

b) *La matriz es diagonalizable si* $a = 0$, ya que sólo en ese caso admite una base de autovectores.

La matriz de paso P tiene por columnas los autovectores y la matriz diagonal tiene en la diagonal los autovalores (en el mismo orden que hemos puesto los autovectores en P), por lo que $P^{-1}AP = D$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ■

5.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.4 Hallar el polinomio característico, el polinomio mínimo, los autovalores y autovectores de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$A \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 \\ m(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ \lambda_1 = 2 \rightarrow v_1 = (0, 0, 1) \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \rightarrow \ (\dfrac{\sqrt{10}}{10}, 0, -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}),\ (0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}) \end{array} \right.$$

$$B \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \ \rightarrow \ (1, 1, 1) \end{array} \right.$$

Ejercicio 5.5 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^3)$ el endomorfismo que admite los autovalores 1, 2 y -1 con los vectores propios correspondientes $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$ y $(1, 2, 1)$ respectivamente. Obtener la matriz asociada a f, respecto de la base canónica.

Sol: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.6 Estudiar si las matrices siguientes son diagonalizables. Si lo son, encontrar la forma diagonal y la matriz de paso:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: Para A: $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 3/2\sqrt{7} & 1/\sqrt{15} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 3/2\sqrt{7} & 2/\sqrt{15} \\ 2/3 & 0 & 3/2\sqrt{7} & 3/\sqrt{15} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{7} & 1/\sqrt{15} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

B no es diagonalizable.

Ejercicio 5.7 Estudiar para qué valores de α y β, es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Sol: No se diagonalizable si $\beta = 1$ y $\alpha = 0$ o si $\beta = 5$ y $\alpha = 0$.

Ejercicio 5.8 Se considera el endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ que, respecto de la base canónica, tiene por matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los autovalores de f.

b) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, encontrar una base, respecto de la cual, la matriz de f sea diagonal.

Sol:

a) -2, -1 y 3.

b) Es diagonalizable. $\mathcal{B} = \{(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), (0, 0, 1)\}$.

Ejercicio 5.9 ¿Bajo qué condiciones es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}?$$

Sol: $a = f = 0$.

Ejercicio 5.10 Encontrar la forma diagonal y una matriz de paso ortogonal para la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sol: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{11} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{11} & 1/2 \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{11} & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/\sqrt{11} & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.11 Diagonalizar por semejanza, con matriz de paso ortogonal, las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Sol:

A: $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

B: $P = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

C: $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.12 Estudiar, según los valores de α, si son diagonalizables las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha+2 & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol: A es diagonalizable si $\alpha = -{}^4\!/\!_3$ y B si $\alpha = 0$.

Ejercicio 5.13 Determinar, según los valores de a, b, c, cuándo es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol: No es diagonalizable si $a = 1$ y $c \neq 0$ o si $a = -1$ y $b \neq 0$, en los demás casos lo es.

Ejercicio 5.14 Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^4)$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_1, x_1, x_1 + ax_2)$$

Hallar a para que sea diagonalizable, obteniendo una base de $\mathbf{R}^4$ en la que la matriz asociada a f sea diagonal.

Sol: Es diagonalizable si $a = 0$, en cuyo caso

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), ({}^1\!/\!_{\sqrt{7}}, {}^2\!/\!_{\sqrt{7}}, {}^1\!/\!_{\sqrt{7}}, {}^1\!/\!_{\sqrt{7}})\}$$

Ejercicio 5.15 Sabiendo que $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R})^3$ es diagonalizable, que admite por vectores propios a

$$(-1, 2, 2),\ (2, 2, -1) \text{ y } (2, -1, 2)$$

y que $f(5, 2, 5) = (0, 0, 9)$, hallar los autovalores de f y su ecuación en la base canónica.

Sol: Sus autovalores son 2, -1 y 1 y su matriz asociada respecto a la base canónica $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 \\ -10 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.16 Diagonalizar, ortogonalmente, las matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$A\colon\quad P=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B\colon\quad P=\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.17 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^3)$ dado por:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+\alpha x_2+(\alpha-2)x_3,\ x_2+x_3,\ \alpha x_3)$$

a) Hallar los valores de α para los que la matriz de f, respecto de la base canónica, es diagonalizable, encontrando una matriz de paso.

b) Para los valores de α anteriores:

b.1) Estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva.

b.2) Dada $L=<(1,2,-1),(0,3,1)>$, hallar $L\cap \operatorname{Ker} f$.

b.3) Hallar L', suplementario de $\operatorname{Img} f$.

c) Dar un subespacio H de dimensión 2, tal que $f(H)=H$.

Sol:

a) $\alpha=0,\ P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) No es ni inyectiva ni sobreyectiva, $L\cap \operatorname{Ker} f=\{0\}$, $L'=<(0,0,1)>$.

c) $H=<(1,0,0),(0,1,0)>$.

Ejercicio 5.18 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R})^4$ cuya matriz y núcleo son respecto a la base canónica los siguientes:

$$\text{Ker}(f)\equiv\begin{cases} 3x_1-x_3+3x_4=0 \\ 5x_3-3x_4=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 5 & a & b & c \\ d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 5 & -3 \\ 4 & 0 & -3 & g \end{pmatrix}$$

Sabiendo que f admite por autovalor $\lambda=5$, se pide:

a) Determinar la matriz A.

b) Calcular los autovalores y autovectores.

c) Hallar la forma diagonal y una matriz de paso.

Sol:

a) $a = b = d = e = f = 0$, $c = 4$ y $g = 5$.

b) Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = \ \ 0 \\ \lambda_2 = \ \ 0 \\ \lambda_3 = \ \ 5 \\ \lambda_4 = 10 \end{cases}$ y autovectores $\begin{cases} v_1 = (\ \ 0, & 1, & 0, & 0) \\ v_2 = (-4, & 0, & 3, & 5) \\ v_3 = (\ \ 3, & 0, & 4, & 0) \\ v_4 = (\ \ 4, & 0, & -3, & 5) \end{cases}$

c) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.19 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ el endomorfismo tal que $f(2, 3, 4) = (6, 3, 6)$, los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son autovectores y la traza de la matriz asociada a f respecto de la base canónica es 5. Se pide:

a) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$ en los siguientes casos:

   a.1) Sabiendo que f no es diagonalizable.

   a.2) Sabiendo que el menor de sus autovalores es doble.

b) En las condiciones del apartado (a.2) hallar, si es posible, una base de $\mathbf{R}^3$ respecto de la cual, la matriz asociada a f sea diagonal.

Sol: a.1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 8 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, a.2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\}$.

Ejercicio 5.20 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$:

$$L : x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0 \qquad y \qquad L' =< (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$$

Sea f un endomorfismo del que se sabe:

a) $f(1,0,0,0) = (1,1,1,1)$.

b) $(0,0,0,1) \in N(f)$.

c) $f(L) \subseteq L'$.

d) $f(f(0,1,0,-1)) = (0,2,1,1)$.

e) $rg(f) = 2$.

Determinar f, sus autovalores y decidir si es, o no, diagonalizable.

Sol: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9/4 & 0 \\ 1 & -1 & 17/4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1/2 \\ \lambda_4 = 1/2 \end{cases}$, no diagonalizable.

Ejercicio 5.21 Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ definido por:

$$f(1,0,0) = (5,-4,2) \qquad f(1,1,0) = (1,1,4) \qquad f(0,0,1) = (a,a,b)$$

Sabiendo que f posee un autovalor doble y que el otro autovalor es 0:

a) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

b) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso de serlo, hallar su forma diagonal y la matriz de paso.

c) Hallar, si es posible, una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Sol:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Es diagonalizable. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

c) $\mathcal{B} = \{(2/3, 2/3, -1/3), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}, 4/3\sqrt{2})\}$.

Ejercicio 5.22 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -\alpha+2\beta \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar, en función de los parámetros α y β, cuándo es diagonalizable.

b) En los casos en que sea diagonalizable, hallar una forma diagonal y su matriz de paso.

c) Hallar A^{1994} para $|\alpha| = 1$ y $|\beta| = 1$ con $\alpha \neq \beta$. ¿Depende este resultado de los valores que tomen α y β? Justifica la respuesta.

Sol:

a) Es diagonalizable si $\alpha \neq \beta$.

b) $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha-\beta \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \beta-\alpha \end{pmatrix}$.

c) $A^{1994} = I$ tanto para $a = 1$ y $b = -1$ como para $a = -1$ y $b = 1$.

Ejercicio 5.23 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$ siguientes:

$F_1 =< (-4,0,1,1),(-5,1,1,1),(1,-1,0,0) > \quad L_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$F_2 =< (-3,1,1,0),(-1,1,0,0),(0,-2,1,0) > \quad L_2 = F_1 + F_2$

$L =< (0,0,1,0),(0,0,0,1) >$

y la de $\mathbf{R}^3$ $\quad L' = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Sean $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ aplicaciones lineales que cumplen:

$$g(1,-1,1) = (-1,-1,-1,3) \qquad g(0,1,-2) = (2,-1,1,-1)$$
$$g(1,1,0) = (3,0,1,1) \qquad f(0,1,0,0) = (0,2,1)$$

$\operatorname{Ker} f = L_1 \cap L_2$; $f(L) = L'$; $\sum_{ij} a_{ij}^2 = 14$; $a_{ij} \geq 0 \ \forall\, i,j$, siendo a_{ij} los elementos de la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

a) Hallar las matrices asociadas a f y g respecto de las bases canónicas.

b) ¿Es diagonalizable la matriz que representa a $f \circ g$ respecto a la base canónica? Razonar la respuesta.

c) Determinar dos números reales α, β y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ de forma que la matriz de $g \circ f$ respecto de $\mathcal{B}$ sea diagonal con su diagonal igual a $(0, 0, \alpha, \beta)$.

Sol:

a) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Si, pues tiene tres autovalores diferentes.

c) $\alpha = 2$, $\beta = 7$, $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, -1), (1, -1, 0, 0), (3, -9, -1, 11), (4, 3, 2, -2)\}$.

Ejercicio 5.24 Sea $\alpha \in \mathbf{R}$. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar para qué valores de α es A una matriz diagonalizable.

b) Para $\alpha = 0$, diagonalizar A con una matriz de paso ortogonal.

c) Para $\alpha = 0$, ¿hay algún $n \in \mathbf{N}$ tal que A^n sea la matriz unidad? Razonar la respuesta.

Sol:

a) $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$.

b) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $n = 2$.

Ejercicio 5.25 Sea la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar

a) Los valores de α para los que los autovalores son reales.

b) Los valores de α para que tenga autovalores dobles.

c) Los valores de α para que la matriz sea diagonalizable.

d) La forma diagonal y la matriz de paso para $\alpha = -4$.

Sol:

a) $\alpha \leq 0$.

b) $\alpha = 0$.

c) $\alpha < 0$.

d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.26 Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ y A la matriz asociada a f respecto de la base canónica. Sabiendo que una base del núcleo de la aplicación lineal g que tiene por matriz asociada, respecto de la base canónica, $A - I$ es

$$\mathrm{Ker}\, g = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$$

y que el vector $(0,2,1)$ se transforma en el $(1,1,0)$, se pide:

a) Calcular los autovalores y los subespacios propios de A.

b) Hallar la matriz diagonal asociada a A y su matriz de paso.

c) ¿Es inyectivo el endomorfismo f? (Justifica la respuesta).

d) Determinar los subespacios propios de A^n.

Sol:

a) $\lambda_1 = 0$ con $V_0 =< (-1, 1, 1) >$ y

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ con $V_1 =< (1, 1, 0), (1, 0, 1) >$.

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) No. Admite el autovalor nulo.

d) V_0 y V_1.

Ejercicio 5.27 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha+1 \\ 0 & -1 & \alpha+1 \\ \beta+2 & -\beta & \beta-1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de α y β para que A sea diagonalizable y tenga el autovalor -1 doble.

b) Para los valores obtenidos de α y β, hallar una forma diagonal dando la matriz de paso correspondiente.

c) ¿Es posible encontrar una matriz de paso ortogonal? Razona la respuesta.

Sol:

a) $\alpha = -1$ y $\beta = 0$.

b) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

c) No.

Bibliografía

[1] J. de Burgos. *Álgebra Lineal*. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1993.

[2] B. de Diego, E. Gordillo y G. Valeiras. *Problemas de Álgebra Lineal*. Ed. Deimos, Madrid, 1986.

[3] F. Granero Rodríguez. *Álgebra y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1985.

[4] J. Heinhold y B. Riedmtller. *Álgebra y Geometría Analítica (2 volúmenes)*. Ed. Reverté, Barcalona, 1980.

[5] B. Noble y J. W. Daniel. *Álgebra Lineal Aplicada*. Ed. Prentice-Hall, 1989.

[6] C. Pita Ruiz. *Álgebra Lineal*. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1992.

[7] J. Rojo. *Álgebra Lineal*. Ed. AC, 1986.

[8] G. Strang. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, México, 1986.

[9] J.R. Torregrosa Sánchez y C. Jordan Lluch. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1987.