http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

Sea k un cuerpo.

Definición 1.1. Un **k-espacio vectorial** o espacio vectorial sobre k es un conjunto E con dos operaciones, suma y multiplicación por elementos de k, que verifican:

Suma

1. Es una operación *cerrada*: $e + e' \in E$, cualesquiera que sean $e, e' \in E$.
2. Es *asociativa*: $(e + e') + e'' = e + (e' + e'')$, cualesquiera que sean $e, e', e'' \in E$.
3. Tiene *elemento neutro*: Existe $0 \in E$ tal que $0 + e = e + 0 = e$, para todo $e \in E$.
4. Todo elemento de E posee un *opuesto*: Para cada $E \in E$ existe $-e \in E$ tal que $e + (-e) = (-e) + e = 0$.
5. Es *conmutativa*: $e + e' = e' + e$, cualesquiera que sean $e, e' \in E$.

Multiplicación por elementos de k

1. Es una operación *cerrada*: $\lambda e \in E$, cualesquiera que sean $\lambda \in k$ y $e \in E$.
2. $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e'$, cualesquiera que sean $\lambda \in k$ y $e, e' \in E$.
3. $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e)$, cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in k$ y $e \in E$.
4. $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e$, cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in E$ y $e \in E$.
5. $1e = e$, siendo 1 la unidad de k.

Los elementos del espacio vectorial E se llaman *vectores* y los del cuerpo base k *escalares*.

Ejemplos 1.2.

• $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in k, 1 \leq i \leq n\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones: *Suma* $(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$ y *multiplicación por escalares* $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda\, x_n)$.

• $k[x] = \{$polinomios en x con coeficientes en $k\}$ es un k- espacio vectorial con las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar.

• $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones suma de números complejos y producto de un número complejo por un número real.

• $\mathbb{C}$ es también un $\mathbb{C}$-espacio vectorial respecto de la suma y el producto de números complejos.

• Matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en k

$$M(m \times n, k) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in k, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

es un k- espacio vectorial con las operaciones: Suma de matrices, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, y producto de una matriz por un escalar, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Una **combinación lineal** de los vectores $e_1, \ldots, e_n \in E$ es un vector de E de la forma $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ para ciertos escalares $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in k$.

Los subconjuntos del espacio vectorial E que conservan la estructura lineal son los que son cerrados por combinaciones lineales:

Definición 1.3. Un subconjunto V de E es un **subespacio vectorial** de E si es cerrado por combinaciones lineales, es decir, si $\lambda v + \mu v' \in V$ cualesquiera que sean $v, v' \in V$ y $\lambda, \mu \in k$.

Ejemplos 1.4.
• Las rectas y los planos que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
• Los polinomios de grado menor o igual que dos forman un subespacio de $k[x]$.
• El conjunto $S(n,k) = \{A \in M(n,k) : A = A^t\}$ de las matrices simétricas de orden n con coeficientes en k es un subespacio vectorial de $M(n,k)$

Se representa por $\langle e_1, \dots e_n\rangle$ el conjunto de las combinaciones lineales de los vectores $e_1, \dots, e_n$. Por definición, $\langle e_1, \dots e_n\rangle$ es un subespacio vectorial de E, el **subespacio generado por los vectores** $e_1, \dots, e_n$.
Si $E = \langle e_1, \dots e_n\rangle$, es decir, si todo vector de E se expresa como combinación lineal de $e_1, \dots, e_n$, se dice que $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman un **sistema de generadores de** E.

Ejemplos 1.5.
• Los polinomios $1, x, x^2$ generan el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a cero.
• Los vectores $u = (1,0,1), v = (0,1,2)$ forman un sistema de generadores del plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + 2y - z = 0$.
• Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan $S(2,\mathbb{R})$.

2. Dependencia e independencia lineal. Bases. Dimensión

Sea E un k-espacio vectorial.
Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E son **linealmente dependientes** si alguno de ellos es combinación lineal de los otros, esto es, si $e_i = \alpha_1 e_1 + \cdots + \hat{e_i} + \cdots + \alpha_n e_n$ para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$.
Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E son **linealmente independientes** si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes o, lo que es equivalente, si existe una combinación lineal de ellos igual al vector cero, necesariamente los escalares de la combinación lineal son cero, si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definición 2.1. Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una **base** de E si generan E y son linealmente independientes.

El vector cero es combinación lineal de cualesquiera vectores, $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n$, luego nunca puede formar parte de una base.

Teorema 2.2. *(Caracterización de una base) Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una base de E si y sólo si cualquier vector de E se puede expresar de modo único como combinación lineal de ellos.*

Demostración.
• Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E, probaremos que para todo vector e de E existen escalares únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$:
Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ generan E, cualquiera que sea $e \in E$ es $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ para ciertos $\lambda_i \in k$. Además, los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son únicos, pues si existen otros escalares $\mu_1, \dots, \mu_n$ tales que $e = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$, igualando, resulta que $(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0$, de donde se deduce que $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$ ya que $\{e_1, \dots, e_n\}$ son linealmente independientes, luego $\lambda_1 = \mu_1 \dots \lambda_n = \mu_n$.
• Recíprocamente, si todo vector de E se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ demostraremos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una base de E:
$\{e_1, \dots, e_n\}$ generan E pues todo vector de E es combinación lineal de ellos y son linealmente independientes, ya que si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ necesariamente $\lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$ pues el vector cero es $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n$ y por hipótesis los escalares de la combinación lineal son únicos. □

Si $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ es la expresión del vector e en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, los escalares $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ son las **coordenadas del vector** e en esa base.

Ejemplos 2.3.
• Los vectores $\{(1,0,0\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.
• Los números complejos $\{1,i\}$ forman una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
• Los polinomios $\{1,x,x^2\}$ forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos. Las coordenadas del polinomio $5-3x+2x^2$ en esta base son $(5,-3,2)$.
• Los vectores $u=(1,0,1), v=(0,1,2)$ forman una base del plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x+2y-z=0$. Las coordenadas, respecto de esa base, del vector $e=(1,1,3)$ del plano son $(1,1)$, pues $e=u+v$.
• Las matrices $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ definen una base de $S(2,\mathbb{R})$. Las coordenadas de la matriz simétrica $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$ en esa base son $(2,3,1)$, ya que $A=2A_1+3A_2+A_3$.

Probaremos ahora que **toda colección de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial se puede ampliar hasta formar una base del espacio**.

Teorema 2.4. (Teorema de Steinitz) *Sean $\{v_1,\ldots,v_m\}$ vectores linealmente independientes de E y $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E. Se pueden sustituir m vectores de la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ por los vectores $\{v_1,\ldots,v_m\}$ para obtener una nueva base de E.*

Demostración. Iremos sustituyendo, uno a uno, m vectores de la base $\{e_i\}$ por los vectores $\{v_1,\ldots,v_m\}$.
• Probaremos que $\{v_1,e_2,\ldots,e_n\}$ es una base de E.
Como $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base y $v_1\in E$ es $v_1=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$ **(1)**
y no todos los escalares $\{\lambda_i\}$ son nulos, pues en ese caso $v_1=0$ y el vector cero no puede formar parte de una colección de vectores linealmente independientes.
Podemos suponer, reordenando la base si es preciso, que $\lambda_1\neq 0$. Despejando, resulta que $e_1=\frac{1}{\lambda_1}v_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_n-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}e_n$, de lo que se deduce que los vectores $\{v_1,e_2\ldots,e_n\}$ generan E.
Los vectores $\{v_1,e_2\ldots,e_n\}$ son linealmente independientes ya que si $\mu_1v_1+\cdots+\mu_ne_n=0$, sustituyendo v_1 por **(1)** se obtiene $\mu_1\lambda_1e_1+(\mu_1\lambda_2+\mu_2)e_2+\cdots+(\mu_1\lambda_n+\mu_n)e_n=0$ y $\mu_1\lambda_1=\mu_1\lambda_2+\mu_2=\cdots=\mu_1\lambda_n+\mu_n=0$ por ser $\{e_1,\ldots,e_n\}$ linealmente independientes. Por otra parte, como $\lambda_1\neq 0$ debe ser $\mu_1=0$, de lo que se deduce que también $\mu_2=\cdots=\mu_n=0$.
• Probaremos que $\{v_1,\ldots,v_m,\ldots,e_n\}$ es una base de E.
Supongamos que ya hemos sustituido $m-1$ vectores de la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ por vectores v_i. Reordenando si es preciso, podemos suponer que hemos sustituido los m primeros y que tenemos la nueva base $\{v_1,\ldots,v_{m-1},e_m,\ldots,e_n\}$. Expresando v_m en función de esta base se tiene

$$v_m=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_{m-1}v_{m-1}+\beta_me_m+\cdots+\beta_ne_n\,,$$

donde algún β_i tiene que ser no nulo, pues en otro caso v_m sería combinación lineal de $\{v_2,\ldots,v_m\}$ y hemos supuesto que $\{v_1,\ldots,v_m\}$ son linealmente independientes. Como antes, reordenando si es necesario, podemos suponer que $\beta_m\neq 0$. Y el mismo argumento del apartado anterior prueba que podemos sustituir e_m por v_m de manera que $\{v_1,\ldots,v_m,\ldots,e_n\}$ es una base de E. □

Teorema 2.5. (Teorema de la base) *Todas las bases de un k-espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.*
Se llama dimensión del espacio vectorial E al número de elementos de una base y se representa por $\dim_k E$.

Demostración. Sean $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ dos bases de E. Por el teorema de Steinitz aplicado a la base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$, debe ser $m\leq n$, y ahora a la base $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e_1,\ldots,e_n\}$ da $n\leq m$. Por tanto, $n=m$. □

Es claro que **la dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes y con el número mínimo de generadores**. Por tanto, **en un espacio vectorial de dimensión n cualesquiera n vectores linealmente independientes forman una base**.

Ejemplos 2.6.
• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$
• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ pues $\mathbb{C} = \langle 1, i\rangle$ considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathbb{C} = \langle 1\rangle$ considerado como $\mathbb{C}$-espacio vectorial
• Los vectores $v_1 = (2, 0, 3, 1)$, $v_2 = (-3, 1, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 2, 0)$ y $v_4 = (0, 1, 1, 2)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$, pues son linealmente independientes, ya que $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$, y $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = 4$.
• Los polinomios $\{1, x, x^2\}$ forman una base del espacio vectorial E de los polinomios de grado menor o igual a dos, luego $\dim_k E = 3$. Las coordenadas de los polinomios $\{1-2x, x^2+1, 2+x-x^2\}$ respecto de la base de E anterior son $(1, -2, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(2, 1, -1)$ respectivamente, y como estos vectores son linealmente independientes ya que su determinante es distinto de cero, resulta que $\{1 - 2x, x^2 + 1, 2 + x - x^2\}$ es otra base del espacio E de los polinomios de grado menor o igual a dos.

3. Problemas propuestos

1. Probar que el conjunto de matrices cuadradas diagonales con coeficientes en un cuerpo k tiene estructura de espacio vectorial sobre k.
2. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales:
   a) $E = \{(0, x_2, \ldots, x_n)\}$
   b) $E = \{(1, x_2, \ldots, x_n)\}$
   c) $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{Q}\}$
   d) $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$
   e) $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \sum_{i=1}^n x_i = 5\}$
3. Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Estudiar si E es un subespacio de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donde:
   a) $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon f(3) = 0\}$
   b) $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon f(1) = f(2)\}$
   c) $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon f(-x) = -f(x)\}$
   d) $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon f$ es continua$\}$
   e) $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})\colon f$ es derivable$\}$
4. Demostrar que los vectores $(-5, 2, 8, -16)$, $(-5, 3, 17, -14)$, $(1, 1, 11, 6)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.
5. Demostrar que los vectores $(m, 1, 0)$, $(-1, m, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, sea quien sea m. Comprobar que esta propiedad no se cumple en $\mathbb{C}^3$.
6. Considérense las matrices $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$. Determinar x e y para que dichas matrices sean linealmente independientes.
7. Pruébese que las funciones $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$ son linealmente independientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

   Pruébese otro tanto para las funciones $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son n números reales distintos.
8. Demostrar que el subespacio $E = \{(a, b, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ está generado por cualquiera de los pares de vectores siguientes:
   a) $e = (1, 1, 0)$, $e' = (1, 0, 0)$
   b) $e = (2, -1, 0)$, $e' = (-1, -1, 0)$

9. Determinar x e y en el vector $(3, 2, x, y) \in \mathbb{Q}^4$ para que pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$, $(1, 2, 3, 1)$.
10. Pruébese que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 0)$ coincide con el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(1, 0, 1)$.
11. Hallar un vector común al subespacio E_1 engendrado por los vectores $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$ y al subespacio E_2 engendrado por $(1, 0, 1)$ y $(3, 4, 3)$.
12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$.
    a) Encontrar el valor de m para que existan matrices cuadradas no nulas B tales que $AB = 0$.
    b) Demostrar que dichas matrices (incluida el 0) forman un subespacio vectorial. Encontrar un sistema de generadores linealmente independientes.
13. Averiguar si V es un subespacio vectorial real y en caso afirmativo calcula una base y su dimensión:
    a) $V = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$
    b) $V = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$
    c) $V = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}$
    d) $V = \{(a, b, c) : a = b + c\}$
    e) $V = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
14. En un espacio vectorial E sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ se dan tres vectores a, b, c y se consideran los vectores

$$u = b + c, \quad v = c + a, \quad w = a + b$$

    a) Probar que los subespacios vectoriales engendrados por a, b, c y por u, v, w son el mismo.
    b) Demostrar que los vectores u, v, w son linealmente independientes sí y sólo si lo son a, b, c.
15. Determinar λ para que los vectores $(2, 4, 6), (1, 2, 3), (5, \lambda, 15)$ estén en un mismo plano (subespacio de dimensión 2).
16. Determinar en $\mathbb{Q}^5$ una base del subespacio generado por los vectores $(1, 2, -4, 3, 1)$, $(6, 17, -7, 10, 22)$, $(2, 5, 0, -3, 8)$, $(1, 3, -3, 2, 0)$.
17. Demostrar que el subconjunto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y calcular una base del mismo. ¿Cuál es su dimensión?.
18. Comprobar que los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(4, 6, 12)$ respecto de esta base.
19. Comprobar que los vectores $e = (1, -1, 0)$, $e' = (2, 1, 0)$, $e'' = (0, 1, 1)$ forman una base. Encontrar las coordenadas respecto de la misma del vector $(1, 1, 1)$.
20. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.
21. Consideremos el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor que 3.
    a) Demostrar que los polinomios $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ forman una base.
    b) Hallar las coordenadas del polinomio $3 + 2x + 5x^2$ en dicha base.
22. ¿Cuál es la condición para que dos números complejos

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

    formen una base del espacio vectorial real de los números complejos?.
23. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y se pide:
    a) Hallar una base que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$.

b) Hallar una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$.
c) Hallar una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$ y $(0, 3, 3, 0)$.

24. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.
a) Demostrar que forman una base de $\mathbb{R}^3$.
b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ("*base canónica o estándar*") respecto de esta base.
25. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los vectores $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 0)$. Completar a una base de $\mathbb{R}^4$.
26. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 3, demostrar que $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = (x + 1)^2$, $p_3(x) = (x + 1)^3$ forman una base. Calcular las coordenadas del polinomio $2x^3 + x^2 - 4x - 4$ en dicha base.
27. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable, de grado menor o igual que 2. Sea M el subespacio engendrado por:
$$\{x^2 - 1, x + 1, x^2 - 7x - 8\}$$
Hallar una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que contenga a una base de M.
28. Sea $B = \{e, e', e''\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y v un vector cuyas coordenadas respecto de B son $(1, -1, 2)$.
a) Demostrar que el conjunto $S = \{e + e', e + e' + e''\}$ es linealmente independiente.
b) Completar S a una base B' tal que las coordenadas de v respecto de B' sean $(1, 1, 1)$.
29. Se consideran sobre $\mathbb{R}^4$ los vectores $(1 + \lambda, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + \lambda, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + \lambda, 1)$, $(1, 1, 1, 1 + \lambda)$. Determinar en función de λ la dimensión del subespacio que generan y calcular una base.
30. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ el subespacio E' de los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que $2x_1 + 3x_2 = 2x_3 + 3x_4$. Probar que los vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ son linealmente independientes y están en E'. Extenderlos a una base de E'.
31. Probar que los polinomios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 - x^2$, $p_3(x) = x - x^3$ forman base del espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. Subespacios suma e intersección. Suma directa de subespacios

Definición 1.1. Sean E_1 y E_2 subespacios vectoriales de E. Se definen la **suma** $E_1 + E_2$ y la **intersección** $E_1 \cap E_2$ por

$$E_1 + E_2 = \{e \in E : e = u + v\,, \text{ donde } u \in E_1 \text{ y } v \in E_2\}$$
$$E_1 \cap E_2 = \{e \in E : e \in E_1 \text{ y } e \in E_2\}$$

Probaremos que ambos son subespacios vectoriales de E comprobando que son cerrados por combinaciones lineales:

- Si $u + v, u' + v' \in E_1 + E_2$ y $\lambda, \mu \in k$ el vector $\lambda(u + v) + \mu(u' + v')$ está en $E_1 + E_2$ pues $\lambda(u + v) + \mu(u' + v') = \lambda u + \lambda v + \mu u' + \mu v' = (\lambda u + \mu u') + (\lambda v + \mu v') \in E_1 + E_2$, ya que E_1 y E_2 son cerrados por combinaciones lineales.
- Si $e, e' \in E_1 \cap E_2$ y $\lambda, \mu \in k$, su combinación lineal $\lambda e + \mu e'$ es un vector de E_1 y también de E_2, ya que ambos son subespacios y, por tanto, cerrados por combinaciones lineales. Luego $\lambda e + \mu e'$ es un vector de la intersección $E_1 \cap E_2$.

Es claro que:
• $E_1 + E_2 \supseteq E_1$ y $E_1 + E_2 \supseteq E_2$. La suma $E_1 + E_2$ es el mínimo subespacio que contiene a E_1 y a E_2.
• $E_1 \cap E_2 \subseteq E_1$ y $E_1 \cap E_2 \subseteq E_2$. La intersección $E_1 \cap E_2$ es el mayor subespacio que está contenido en E_1 y en E_2.
• *Sistema de generadores de la suma.* Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es una base de E_1 y $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de E_2, los vectores $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ forman un sistema de generadores de $E_1 + E_2$.

Teorema 1.2. *Se verifica la siguiente fórmula de dimensión*

$$\dim_k(E_1 + E_2) = \dim_k E_1 + \dim_k E_2 - \dim_k(E_1 \cap E_2)$$

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de $E_1 \cap E_2$ que, por el teorema de Steinitz, podemos ampliar para formar una base $\{e_1, \ldots, e_m, \ldots, e_r\}$ de E_1 y otra $\{e_1, \ldots, e_m, v_{m+1}, \ldots, v_s\}$ de E_2.
Los $r + s - m$ vectores $\{e_1, \ldots, e_m, \ldots, e_r, v_{m+1}, \ldots, v_s\}$ generan $E_1 + E_2$. Probaremos que además son linealmente independientes, con lo que quedará demostrado el teorema.
Si $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_m e_m + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \mu_s v_s = 0$ $(*)$, despejando se obtiene

$$\mu_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \mu_s v_s = -\lambda_1 e_1 - \ldots \lambda_m e_m - \cdots - \lambda_r e_r\,,$$

luego el vector $\mu_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \mu_s v_s \in E_2$ está también en E_1, pues es combinación lineal de los vectores de una base de E_1. Por tanto, el vector $\mu_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \mu_s v_s$ está en $E_1 \cap E_2$, y expresándolo como combinación lineal de los vectores de la base $\{e_1, \ldots, e_m\}$, se tiene que $\mu_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \mu_s v_s = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m$, de donde $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m - \mu_{m+1} v_{m+1} - \cdots - \mu_s v_s = 0$, luego $\alpha_1 = \cdots = \mu_{m+1} = \cdots = \mu_s = 0$, pues los vectores $\{e_1, \ldots, e_m, v_{m+1}, \ldots, v_s\}$ son linealmente indepedientes. Sustituyendo en la combinación lineal inicial $(*)$ se obtiene $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_m e_m + \cdots + \lambda_r e_r = 0$, lo que implica que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \cdots = \lambda_r = 0$ ya que $\{e_1, \ldots, e_m, \ldots, e_r\}$ son linealmente independientes. □

Ejemplo 1.3. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \langle u_1 = (1,-1,1,0), u_2 = (0,1,-1,1), u_3 = (2,-1,1,1)\rangle$$
$$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0, x+z+t=0\}$$

Calculemos bases y dimensiones de $E_1 + E_2$ y de $E_1 \cap E_2$. Para ello calcularemos primero una base de E_1 y otra de E_2:
$\dim_{\mathbb{R}} E_1 = \operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 2$ y $E_1 = \langle u_1 = (1,-1,1,0), u_2 = (0,1,-1,1)\rangle$.
$E_2 = \{(x,-x-z,z,-x-z) \in \mathbb{R}^4\} = \langle v_1 = (1,-1,0,-1), v_2 = (0,-1,1,-1)\rangle$ y $\dim_{\mathbb{R}} E_2 = 2$.
Resulta que

$\dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = \operatorname{rg}(u_1,u_2,v_1,v_2) = 3$ y $E_1 + E_2 = \langle u_1, u_2, v_1\rangle$

$\dim_{\mathbb{R}}(E_1 \cap E_2) = \dim_{\mathbb{R}} E_1 + \dim_{\mathbb{R}} E_2 - \dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = 1$ y como $v_2 = -u_2$ es $E_1 \cap E_2 = \langle u_2\rangle$.

Definición 1.4. La **suma directa** de los subespacios E_1 y E_2 es la suma, $E_1 + E_2$, cuando la intersección es cero, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Se representa por $E_1 \oplus E_2$.
En particular, $\dim_k(E_1 \oplus E_2) = \dim_k E_1 + \dim_k E_2$.

2. Subespacios suma e intersección. Suma directa de subespacios

Definición 2.1. Los subespacios E_1 y E_2 de E son **suplementarios** si $E_1 + E_2 = E$ y $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, esto es, si $E = E_1 \oplus E_2$.

Proposición 2.2. *Sean E_1 y E_2 subespacios de E. Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *E_1 y E_2 son subespacios suplementarios.*
(b) *Todo vector de E se expresa de modo único como suma de uno de E_1 y otro de E_2.*
(c) *Si $\{u_1,\dots,u_m\}$ es una base de E_1 y $\{v_1,\dots,v_s\}$ es una base de E_2 los vectores $\{u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s\}$ forman una base de E.*

Demostración.
(a) $\Rightarrow$ (b)
Por hipótesis $E = E_1 + E_2$, luego para todo $e \in E$ es $e = u + v$, con $u \in E_1$ y $v \in E_2$. Esta descomposición es única pues si $e = u' + v'$ es otra, resulta que $u + v = u' + v'$, luego $u - u' = v' - v$ y por tanto el vector $u - u' = v' - v \in E_1 \cap E_2$, pero $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ y se deduce que $u = u'$ y $v = v'$.
(b) $\Rightarrow$ (c)
Por hipótesis, todo vector $e \in E$ se expresa de modo único como suma de uno $u \in E_1$ y otro $v \in E_2$, $e = u + v$.
Si $\{u_1,\dots,u_m\}$ es una base de E_1, $u \in E_1$ se expresa de modo único como combinación lineal $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$. Análogamente, si $v \in E_2$ es $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_s$, con los escalares μ_i únicos, siendo $\{v_1,\dots,v_s\}$ una base de E_2.
Así, se deduce que todo vector $e \in E$ se expresa de modo único como combinación lineal $e = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_s$, luego por el teorema de caracterización de una base los vectores $\{u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s\}$ forman una base de E.
(c) $\Rightarrow$ (a)
Si $\{u_1,\dots,u_m\}$ es una base de E_1 y $\{v_1,\dots,v_s\}$ es una base de E_2, por definición de suma, los vectores $\{u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_s\}$ generan $E_1 + E_2$ y como por hipótesis estos vectores forman una base de E, resulta que $E_1 + E_2 = E$. Por último, de la fórmula de dimensión, $\dim_k(E_1+E_2) = \dim_k E_1 + \dim_k E_2 - \dim_k(E_1 \cap E_2)$, resulta que $\dim_k(E_1 \cap E_2) = 0$, luego $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. □

Ejemplo 2.3.
• Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ $E_1 = \langle (1,2,-1),(3,1,2)\rangle$ y $E_2 = \langle (0,1,1),(1,-1,1)\rangle$ no son suplementarios, pues $\dim_{\mathbb{R}} E_1 + \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 2+2 \neq 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.
• Los planos $E_1 = \langle u_1 = (1,0,-1,0), u_2 = (0,1,1,2)\rangle$ y $E_2 = \langle v_1 = (-1,0,1,1), v_2 = (1,-1,1,2)\rangle$ son suplementarios, pues $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ ya que $\mathrm{rg}(u_1,u_2,v_1,v_2) = 4$.
• Un subespacio suplementario del plano $V = \langle v_1 = (1,0,-1), v_2 = (0,1,1)\rangle$ es la recta $V' = \langle u = (2,1,-2)\rangle$, pues $\mathrm{rg}(v_1,v_2,u) = 3$. La recta $\langle u_1 = (0,2,4)\rangle$ es otro subespacio suplementario del plano V.
• Los subespacios de $M(n,k)$ de las matrices simétricas, $S(n,k) = \{A \in M(n,k) : A = A^t\}$, y de las matrices hemisimétricas, $H(n,k) = \{A \in M(n,k) : A = -A^t\}$, son suplementarios pues toda matriz cuadrada A descompone de modo único en la forma $A = \frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$, siendo $\frac{1}{2}(A+A^t)$ una matriz simétrica y $\frac{1}{2}(A-A^t)$ una matriz hemisimétrica.

3. Problemas propuestos

1. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 y sean $E_1 = \{p(x) \in E : p(0) = 0\}$ y $E_2 = \{p(x) \in E : p'(0) = 0\}$.

(a) Demostrar que E_1 y E_2 son subespacios de E.
(b) Calcular una base y la dimensión de cada uno de los subespacios siguientes
$E_1, E_2, E_1 + E_2, E_1 \cap E_2$
(c) ¿Son E_1 y E_2 subespacios suplementarios?

2. Sea F el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1,1,-1)$ y G el subespacio de ecuaciones $3x - y = 0$, $2x + z = 0$. Determinar $F \cap G$.

3. Determinar en $\mathbb{R}^3$ un subespacio suplementario de cada uno de los subespacios engendrados por los siguientes vectores:

(a) $v_1 = (-3,1,0)$
(b) $v_1 = (-1,2,1)$, $v_2 = (2,-4,3)$
(c) $v_1 = (-1,2,1)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (1,1,-1)$

4. Dados los subconjuntos de $\mathbb{R}^4$

$$E_1 =< (1,2,-3,0),(2,1,1,3),(5,4,-1,6) > ;\ E_2 = \{(x,y,z,t) \colon x - 2y - z = 0,\ t = 0\}$$

(a) Demostrar que E_1 y E_2 son subespacios vectoriales y calcular bases y dimensiones de los mismos.
(b) Calcular bases y dimensiones de $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
(c) Calcular un suplementario de E_2.

5. Sean E y E' dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$E = \{(a,b,c) \colon a = b = c\}\,,, \quad E' = \{(0,b,c) \colon b,c \in \mathbb{R}\}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3 = E \oplus E'$.

6. Sean E y E' dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por: $E = \{(x,y,z) \colon x + y + z = 0\}$, $E' = \{(t,2t,3t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ Demostrar que E y E' son subespacios suplementarios.

7. Sean E, E', E'' los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(a,b,c) \colon a + b + c = 0\}, \quad E' = \{(a,b,c) \colon a = c\}, \quad E'' = \{(0,0,c)\}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3 = E + E'$, $\mathbb{R}^3 = E + E''$, $\mathbb{R}^3 = E' + E''$. ¿En qué casos se trata de suma directa?.

8. Sea $E = M(2, \mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea V el subconjunto de E definido por:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E : 2x - y + t = 0, x = z \right\}$$

(a) Probar que V es un subespacio vectorial de E y calcular su dimensión y una base.

(b) Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in V$ en la base elegida en el apartado anterior.

(c) Calcular un suplementario de V.

9. Se considera el espacio $\mathbb{R}^4$ y los subespacios E y V generados, respectivamente, por las parejas de vectores $e = (1, 0, 1, 0)$, $e' = (0, 1, 0, 1)$ y $v = (0, 0, 1, 3)$ y $v' = (1, 0, 0, 1)$. Estudiar si $\mathbb{R}^4$ es suma directa de E y V.

10. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(2, 3, 1)$ y E_2 el subespacio generado por $(0, 1, 2)$ y $(1, 1, 1)$. Probar que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ y expresar el vector generado por $(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ como suma de un vector de E_1 y otro de E_2.

11. Sea $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $V = \{p(x) \in E : p(1) = 0\}$.

(a) Probar que V es un subespacio de E y calcular su dimensión y una base.

(b) Calcular las coordenadas del polinomio $x^2 - 3x + 2 \in V$ respecto de la base del apartado anterior.

(c) Encuentra un subespacio suplementario de V.

12. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 =< (1, 0, -1, 0), (2, -1, 2, 0), (3, -2, 3, 0) >$ y $E_2 =< (0, 1, 1, 0), (1, 1, 3, 0), (-2, 1, 1, 1) >$.

(a) Calcular bases y dimensiones de E_1, E_2, $E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2$.

(b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$?

(c) Calcula dos subespacios suplementarios diferentes de E_1.

13. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por los siguientes vectores:

$$E_1 =< (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1) >, \quad E_2 =< (1, -1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) >$$

Se pide:

(a) Hallar las dimensiones de E_1, E_2, $E_1 + E_2$, $E_1 \cap E_2$.

(b) Estudiar si $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) ¿E_1 y E_2 son subespacios suplementarios?

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. APLICACIONES LINEALES. NÚCLEO E IMAGEN. TIPOS DE APLICACIONES LINEALES.

Sean E y E' k-espacios vectoriales.

Definición 1.1. Una **aplicación** $E \xrightarrow{T} E'$ es **lineal** si $T(e+v) = T(e) + T(v)$ y $T(\lambda e) = \lambda T(e)$ o, lo que es equivalente, $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v)$, cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\lambda, \mu \in k$.

Si $E \xrightarrow{T} E'$ es una aplicación lineal la imagen del vector cero es el vector cero:
$T(0) = T(0e + 0v) = 0T(e) + 0T(v) = 0$.

Ejemplo 1.2.
• La aplicación

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + z + 2, y - z)$$

No es lineal pues $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$
• La aplicación derivada sobre el espacio E de los polinomios en una variable, $E \xrightarrow{D} E$, es lineal : $D(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \lambda p'(x) + \mu q'(x) = \lambda D(p(x)) + \mu D(q(x))$.
• La aplicación

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, z^2)$$

No es lineal ya que $T(\lambda(x,y,z))$ no es igual $\lambda T(x,y,z)$ para todo valor de λ.
$T(\lambda(x,y,z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda^2 z^2) \neq (\lambda x + \lambda y, \lambda z^2) = \lambda(x + y, z^2) = \lambda T(x,y,z)$.
La igualdad se da si $\lambda^2 = \lambda$, esto es, sólo para $\lambda = 0, 1$

1.1. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición 1.3. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, se definen su **núcleo**, $\ker T$, y su **imagen**, $\operatorname{Im} T$, por:

$$\ker T = \{e \in E : T(e) = 0\} \subseteq E$$
$$\operatorname{Im} T = \{e' \in E' : e' = T(e)\,, \text{ para algún } e \in E\} \subseteq E'$$

Teorema 1.4. *Si $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, $\ker T$ es un subespacio vectorial de E e $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de E' y se verifica la fórmula de dimensión:*

$$\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k \operatorname{Im} T$$

Demostración.
• $\ker T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $e, v \in \ker T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v) = 0$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \ker T$.
• $\operatorname{Im} T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $T(e), T(v) \in \operatorname{Im} T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $\lambda T(e) + \mu T(v) = T(\lambda e + \mu v)$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \operatorname{Im} T$.

• Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $\ker T$.
Ampliemos esta base para formar una base $\{v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de E.
Tomando imágenes por T, los vectores $\{T(v_1), \ldots, T(v_m), T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ generan $\operatorname{Im} T$, y como $T(v_1) = \cdots = T(v_m) = 0$ por definición de núcleo, resulta que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} T$. Probaremos que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ son linealmente independientes con lo que quedará demostrada la fórmula.
Si $\lambda_{m+1}T(e_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(e_n) = 0$, por ser T lineal, $T(\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$, por tanto el vector $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n$ pertenece a $\ker T$, luego $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, ya que $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ generan un suplementario de $\ker T$ y como además son linealmente independientes resulta que $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Ejemplo 1.5. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Calculemos el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

(a) Operador derivada: $E \xrightarrow{D} E$, definido por $D(p(x)) = p'(x)$.

(b) $E \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, definida por $T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$

- $\ker D = \{p(x) \in E : p'(x) = 0\} = \{\text{polinomios constantes}\} = \langle 1 \rangle$.
  $\operatorname{Im} D = \langle 1, x, x^2 \rangle$, pues la derivada de un polinomio de grado menor o igual que tres es un polinomio de grado menor o igual que 2.
- $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ y como $\operatorname{Im} T \neq (0)$, ha de ser $\operatorname{Im} T = \mathbb{R} = \langle 1 \rangle$, luego $\dim \ker T = \dim E - \dim \operatorname{Im} T = 4 - 1 = 3$.
  Calculemos una base del $\ker T$:

$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2 + dx^3)dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2}{3}c$$

luego

$$\ker T = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in E : 2a + \frac{2}{3}c = 0\} = \{a + bx - 3ax^2 + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1 - 3x^2) + bx + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\} = \langle 1 - 3x^2, x, x^3 \rangle$$

1.2. Aplicaciones lineales inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

Definición 1.6. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal. T es inyectiva o epiyectiva si como aplicación de conjuntos lo es, esto es:
• T es **inyectiva** si siempre que $T(e) = T(v)$ se deduce que $e = v$, cualesquiera que sean $e, v \in E$
• T es **epiyectiva** si $\operatorname{Im} T = E'$.

T es biyectiva si es a la vez inyectiva y epiyectiva. Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman **isomorfismos**.
Un **endomorfismo** de E es una aplicación lineal de E en si mismo, $E \xrightarrow{T} E$. Se llaman **automorfismos** a los endomorfismos biyectivos.

Ejemplo 1.7.
• Sea V un subespacio vectorial de E, la inclusión natural

$$V \hookrightarrow E$$
$$v \mapsto v$$

es una aplicación lineal inyectiva.
• Si E representa el espacio vectorial de los polinomios, $p(x)$, de grado menor o igual que tres y E' el de los polinomios de grado menor o igual que dos, la aplicación derivada

$$E \xrightarrow{D} E'$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

es una aplicación lineal epiyectiva.
• La aplicación identidad

$$\begin{array}{c} E \xrightarrow{Id} E \\ e \mapsto e \end{array}$$

es un automorfismo de E.

Proposición 1.8. *Una aplicación lineal* $E \xrightarrow{T} E'$ *es inyectiva si y sólo si* $\ker T = \{0\}$.

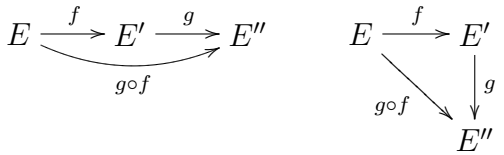
Demostración.
$\Rightarrow$ Si $e \in \ker T$ es $T(e) = 0$, luego $T(e) = T(0)$ pues $T(0) = 0$. Como T es inyectiva, de $T(e) = T(0)$ se deduce que $e = 0$.
$\Leftarrow$ Si $T(e) = T(e')$, por ser T lineal $T(e - e') = 0$, luego $e - e' \in \ker T$, y como $\ker T = \{0\}$ resulta que $e = e'$, lo que prueba que T es inyectiva. □

1.3. Operaciones con aplicaciones lineales: Suma, multiplicación por escalares, composición. Aplicación lineal inversa.

– Dadas aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$, las **aplicaciones suma** y **multiplicación por un escalar**, definidas repectivamente por

$$\begin{array}{ll} E \xrightarrow{f+g} E' & E \xrightarrow{\lambda f} E' \\ e \mapsto f(e) + g(e) & e \mapsto \lambda f(e) \end{array}$$

son aplicaciones lineales, pues cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\alpha, \mu \in k$ se verifica $(f+g)(\alpha e + \mu v) = \alpha(f+g)(e) + \mu(f+g)(v)$ y $(\lambda f)(\alpha e + \mu v) = \alpha(\lambda f)(e) + \mu(\lambda f)(v)$, como es fácil comprobar.
El conjunto de las aplicaciones lineales de E en E' se representa por $\mathrm{Hom}_k(E, E')$ y es un k-espacio vectorial con las operaciones anteriores.
– La **composición** de aplicaciones lineales



definida, para cada $e \in E$, por $(g \circ f)(e) = g(f(e))$, es una aplicación lineal:

$$(g\circ f)(\alpha e+\mu v) = g(f(\alpha e+\mu v)) = g(\alpha f(e)+\mu f(v)) = \alpha(g\circ f)(e)+\mu(g\circ f)(v),\ \forall e, v \in E, \alpha, \mu \in k\,.$$

–Una aplicación $E \xrightarrow{f} E'$ tiene **inversa** si existe otra aplicación $E' \xrightarrow{f^{-1}} E$ tal que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id\,.$$

Las aplicaciones biyectivas tienen aplicación inversa y, recíprocamente, cualquier aplicación que tiene inversa es biyectiva.
La inversa de una aplicación lineal es también una aplicación lineal.

Ejemplo 1.9. Sea T un endomorfismo del k-espacio vectorial E tal que $T^2 = T + I$. Probaremos que T es automorfismo y calcularemos T^{-1} en función de T.
De $T^2 = T + I$ se sigue $I = T^2 - T = T(T - I)$, lo que prueba que T tiene inversa y esta es $T^{-1} = T - I$ y por tanto es biyectiva.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

2. Aplicaciones lineales en coordenadas: Matrices

2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal.

Dada una aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ y bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E', existe una única matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, k)$ determinada por

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \,, \text{ para } j = 1, \dots, n$$

A es la *matriz asociada a T respecto de la las bases* $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'. Las columnas de A son las coordenadas de los vectores $T(e_1), \dots, T(e_n)$ respecto de la base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.
Si $e = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ y $T(e) = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_m e'_m$, la *expresión en coordenadas de T* es

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_m) \,, \text{ siendo } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \text{ la expresión matricial del}$$

sistema lineal que T define.
Obsérvese que:
• A es la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior y $\ker T$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado.
• Los vectores $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ forman un sistema de generadores del subespacio imagen, $\operatorname{Im} T$, luego su dimensión coincide con el rango de la matriz A y por tanto la dimensión del núcleo es la de E menos el rango de A

$$\dim_k \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A \,, \quad \dim_k \ker T = \dim_k E - \operatorname{rg} A$$

Ejemplo 2.1. Dada la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, x + 2z, y, y + z)$$

calculemos su matriz asociada y probemos que T es inyectiva.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker T = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \ker_{\mathbb{R}} T = \{0\}$$

Ejemplo 2.2. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{e'_1 e'_2, e'_3, e'_4\}$ una base de E' y $k = \mathbb{R}$. Considérense la aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e'_2 - e'_3 \,, \; T(e_2) = 2e'_2 - e'_4 \,, \; T(e_3) = 3e'_1 + 3e'_2 - 3e'_3$$

calculemos su expresión en coordenadas y bases y dimensiones de $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$.
La matriz asociada a T, por columnas, es $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2 \,, \quad \operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2) \rangle = \langle e'_1 + e'_2 - e'3, 2e'_1 - e'_4 \rangle$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \operatorname{rg} A = 1$$
$$\ker T \equiv \begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\ker T = \{(-3z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle (-3, 0, 1) \rangle = \langle -3e_1 + e_3 \rangle$$

2.2. Matrices asociadas a la suma de aplicaciones lineales y al producto de una aplicación lineal por un escalar.

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ las matrices asociadas a las aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$ respecto de la las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.

• La matriz asociada a la aplicación lineal suma $f + g$ es la matriz $A + B$. En efecto:

$$(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + b_{ij})e'_i$$

• La matriz asociada a la aplicación lineal λf es la matriz λA. En efecto:

$$(\lambda f)(e_j) = \lambda f(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij}e'_i$$

2.3. Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales.

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'' \qquad E \xrightarrow{g\circ f} E''$$

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a f respecto de la las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E' y sea $B = (b_{ij})$ la matriz asociada a g respecto de la las bases $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E' y $\{e''_1, \dots, e''_s\}$ de E'', esto es:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i\,, \text{ para } j = 1, \dots, n\,; \quad g(e'_i) = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k\,, \text{ para } i = 1, \dots, m$$

La matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e''_1, \dots, e''_s\}$ de E'' es la matriz producto $B \cdot A$. En efecto:

$$(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(e'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k = \sum_{k=1}^{s}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})e''_k = \sum_{k=1}^{s}(B \cdot A)_{kj}e''_k$$

Ejemplo 2.3. Dadas las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cc} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y + 2z) & (x, y) \mapsto (x + y, 2y, x - y) \end{array}$$

Calculemos las matrices asociadas a $f \circ g$ y $g \circ f$ y la dimensión y una base del subespacio $\mathrm{Im}(f \circ g)$ de $\mathbb{R}^2$ y del subespacio $\mathrm{Im}(g \circ f)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Cambios de base

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E, que llamaremos *base inicial o antigua*, y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ otra base de E, a la que nos referiremos como *base nueva*. Los vectores $\bar{e}_j$ de la base nueva expresados como combinación lineal de los de la base antigua, $\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i$, definen la matriz $B = (b_{ij})$ que expresa el cambio de base en el espacio vectorial E.

La *matriz de cambio de base* $B = (b_{ij})$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base nueva en función de los de la antigua.

La *aplicación lineal que realiza el cambio de base de matriz* B es la aplicación identidad respecto de las bases $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$.

$$\langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle = E \xrightarrow{Id_B} E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle\,, \quad Id_B(\bar{e}_j) = \bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i\,,$$

cuya expresión en coordenadas es $B\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, siendo $e=\bar{x}_1\bar{e}_1+\cdots+\bar{x}_n\bar{e}_n$ y $e=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ las expresiones en coordenadas del vector e respecto de la base nueva y respecto de la base antigua, coordenadas nuevas $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ y coordenadas antiguas $(x_1,\ldots,x_n)$. Se obtiene así:

3.1. Fórmula del cambio de base para vectores.

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1. Comprobemos que los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ forman una nueva base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3, $E=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$. Y calculemos la expresión del polinomio $p(x)=3-x+x^2$ en función de esa nueva base.

• $\det(x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1)=\begin{vmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$

Lo que prueba que $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ es una base de E (base nueva), y la matriz de cambio de base respecto de la base inicial $\{1,x,x^2,x^3\}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ respecto de la base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$B=\begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

• Si (a,b,c,d) son las coordenadas del polinomio $p(x)$ en la base nueva, como sus coordenadas iniciales son $(3,-1,1,0)$, se tiene:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

Es decir la expresión de $p(x)$ en la nueva base es:

$$p(x)=-5(x-1)+(2-3x^2)+4(x-x^3)+4(x^3+x^2-1)$$

3.2. Cambio de base para aplicaciones lineales.

Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $E\xrightarrow{T}E'$ respecto de las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E'. Efectuemos cambios de base en E y en E' de matrices respectivas B y B';

$$\langle\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$$

$$\langle\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e'_1,\ldots,e'_m\rangle$$

Si $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de las nuevas bases $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ y $\{\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo, del que se deduce la fórmula de cambio de base

$$\begin{array}{ccc}E&\xrightarrow{T_A}&E'\\ {\scriptstyle Id_B}\uparrow&&\uparrow{\scriptstyle Id_{B'}}\\ E&\xrightarrow{T_{\bar{A}}}&E'\end{array}\qquad T_{\bar{A}}=Id^{-1}_{B'}\circ T_A\circ Id_B\Rightarrow\bar{A}=B'^{-1}\cdot A\cdot B$$

Es fácil deducir las correspondientes fórmulas cuando sólo se cambia la base de E, $\bar{A} = A \cdot B$, o sólo la de E', $\bar{A} = {B'}^{-1} \cdot A$.
En particular, si $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo de E, A su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E y $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de la nueva base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, se tiene:

Fórmula de cambio de base para endomorfismos: $\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$

Ejemplo 3.2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $E \xrightarrow{T} E$ el endomorfismo de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, T(e_2) = 2e_1 - e_3, e_3 + e_2 \in \ker T$$

(a) Averigemos si $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios. De $e_3 + e_2 \in \ker T$ se deduce que $T(e_3) = -T(e_2)$, luego la matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y se tiene:

$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2$ y $\{T(e_1) = (1, 2, -1), T(e_2) = (2, 0, -1)\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$.
$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 1$ y $\{e_3 + e_2 = (0, 1, 1)\}$ es una base de $\ker T$.

Los vectores $\{(1, 2, -1), (2, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ forman una base de E pues su determinante es no nulo, luego $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios.

(b) Calculemos la matriz $\bar{A}$ de T respecto de la base $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$. La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, luego

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -6 & -4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Sea $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ una base del espacio vectorial E' y $E \xrightarrow{T'} E'$ la aplicación lineal definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e_2, T(e_2) = e'_1 - e'_2, T(e_3) = e'_2 + e'_3$$

Calculemos la matriz asociada a la composición $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E'.

Las matrices A' de T' y C de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E' son

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = A' \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $\bar{C}$ de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E', viene dada por:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(T' \circ T)_C} & E' \\ {\scriptstyle Id_B}\uparrow & \nearrow_{(T' \circ T)_{\bar{C}}} & \\ E & & \end{array} \qquad \bar{C} = C \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Problemas resueltos

1. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+z, x-y+2z)$$

(a) Calcular la dimensión y una base de los subespacios $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
(b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$? En caso afirmativo, calcular las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base que la identificación anterior define.
(c) Determinar λ para que la imagen del vector $e = (\lambda, 1, 0)$ pertenezca al subespacio generado por $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$.

Solución. Las ecuaciones del endomorfismo y su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= \bar{x} \\ x+z &= \bar{y} \\ x-y+2z &= \bar{z} \end{aligned}\right\} \quad A = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $T(e_3) = T(e_1) - T(e_2)$ es $\operatorname{rg} A = 2$.
(a) $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} A = 2$ e $\operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2)\rangle$.

$$\dim(\ker T) = 3 - \operatorname{rg} A = 1$$
$$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0, x+z=0\} = \langle (1,-1,-1)\rangle$$

(b) $\ker T$ es un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} T$ pues

$$\det(T(e_1), T(e_2), \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,.$$

Si escribimos $\bar{e}_1 = T(e_1)$, $\bar{e}_2 = T(e_2)$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3$, la matriz B del cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base son:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

(c) $(\lambda+1, \lambda, \lambda-1) = T(e) \in \langle e_1, e_2\rangle$ precisamente si $\operatorname{rg}(T(e), e_1, e_2) = 2$, es decir, si:

$$0 = \det(T(e), e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - 1 \implies \lambda = 1\,.$$

2. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+3y-2z, y-z)$$

en las bases $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\bar{u}_1 = (1,-1), \bar{u}_2 = (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución. La aplicación T viene dada en coordenadas, por tanto referida a dos bases prefijadas $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. La matriz de T en estas bases es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ en la base $\{u_1, u_2\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es la matriz $\bar{A}$ asociada a T en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. De modo que, si $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz del cambio de base en $\mathbb{R}^2$, del diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{T_A} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow^{T_{\bar{A}}} & \uparrow{\scriptstyle Id_B} \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

resulta $B \cdot \bar{A} = A$, luego:

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor que 3. Se define una aplicación $E \xrightarrow{T} E$ por:

$$T(p(x)) = p(0) + p'(0)(x-1) + p''(0)(x-1)^2$$

(a) Probar que T es lineal y calcular su matriz en la base $\{1, x, x^2\}$ de E.
(b) Es T un isomorfismo?. Razónese la respuesta.

Solución.
(a) T es lineal, en efecto:

$$\begin{aligned} T(\lambda p + \mu q) &= (\lambda p + \mu q)(0) + (\lambda p + \mu q)'(0)(x-1) + (\lambda p + \mu q)''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda p(0) + \mu q(0) + \lambda p'(0)(x-1) \\ &\quad + \mu q'(0)(x-1) + \lambda p''(0)(x-1)^2 + \mu q''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda T(p) + \mu T(q). \end{aligned}$$

Por otra parte, la matriz de T en la base $\{1, x, x^2\}$ tiene por columnas las coordenadas en esta base de los vectores $T(1) = 1$, $T(x) = x - 1$, $T(x^2) = 2(x-1)^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Como $\operatorname{rg} A = 3$, pues $\det(A) \neq 0$, se tiene que $\dim \operatorname{Im} T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} E$, luego T es epiyectiva. De la fórmula de la dimensión $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T$ se sigue que $\ker T = \{0\}$ y en consecuencia T también es inyectiva.

4. Hallar las ecuaciones de la tranformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) La restricción de T al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ es una homotecia de razón 3.
(b) T deja invariante la recta r

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{aligned}\right\}$$

(c) $T(0, 0, -1) = (10, -5, -3)$

Solución. El plano π y la recta r son subespacios suplementarios, pues $\pi \cap r = \{0\}$ ya que el sistema lineal determinado por sus ecuaciones tiene determinante no nulo. Por tanto, si elegimos como base (nueva) en $\mathbb{R}^3$ $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, siendo $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \pi$ y $\langle \bar{e}_3 \rangle = r$ bases respectivas de π y r, la matriz asociada a T en esta base es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} ,$$

pues por la condicin (a) es $T(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1$, $T(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$ y de la condicin (b) se deduce que $T(\bar{e}_3) = \lambda \bar{e}_3$ para algn $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calculemos bases de π y r:

$$\pi = \langle \bar{e}_1 = (1, 0, -1), \bar{e}_2 = (0, 1, -1) \rangle ; \quad r = \langle \bar{e}_3 = (-2, 1, 0) \rangle .$$

Por ltimo, el λ de la matriz $\bar{A}$ se determina imponiendo la condicin (c), pero para ello hay que efectuar previamente un cambio de base. Si A es la matriz de T en la base antigua y B es la matriz del cambio de base es:

$$A = B \cdot \bar{A} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 + 2\lambda & -6 + 2\lambda & -6 + 2\lambda \\ 3 - \lambda & 6 - \lambda & 3 - \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y aplicando(c)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} , \quad \text{resulta } \lambda = -2 .$$

Y las ecuaciones de T son:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} -7x - 10y - 10z &= \bar{x} \\ 5x + 8y + 5z &= \bar{y} \\ 3z &= \bar{z} \end{aligned}$$

5. Problemas propuestos

1. Sea $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z)$$

Probar que es una aplicación lineal y calcular bases y dimensión del núcleo y la imagen. ¿Es epiyectiva?

2. Sea $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$T(x, y, z) = (y - z, -x + 4z, y + z)$$

Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que 4. Se define la aplicación $T \colon E \to E$ por $T(p(x)) = (x - 1)p'(x)$, siendo $p'(x)$ la derivada del polinomio $p(x)$.

(a) Demostrar que T es lineal. Calcular su núcleo y su imagen.
(b) Calcular los polinomios $p(x)$ tales que $T(p(x)) = p(x)$.

4. Sea $T \in End_k(E)$. Pruébese que el conjunto S de vectores que permanecen invariantes forman un subespacio vectorial.

5. Sobre el espacio vectorial E de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación $T\colon E \to E$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3b & 6a-4b \\ -a+\frac{9}{2}b+3c-2d & 6a-3b-d \end{pmatrix}$$

Probar que T es lineal y calcular su núcleo y su imagen.

6. Sea $f \in End_k(E)$ tal que $f^2 = Id$. Pruébese que los subconjuntos E^+ y E^- de E definidos por $E^+ = \{x \in E\colon f(x) = x\}$, $E^- = \{x \in E\colon f(x) = -x\}$ son subespacios de E y se verifica $E = E^+ \oplus E^-$.
Utilícese lo anterior para demostrar que toda función real de variable real es suma, de manera única, de una función par más una impar.

7. Sea T un endomorfismo idempotente, $T^2 = T$, del espacio vectorial E. Pruébese que la imagen de T está formada por los vectores invariantes por T y conclúyase que

$$E = \ker T \oplus Im\, T$$

8. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y-2z, y-z) \end{array}$$

en las bases $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9. Para cada número real θ, sea $\tau_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por la fórmula:

$$\tau_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

(a) Pruébese que τ_θ es un automorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y hállese su matriz en la base estándar del espacio.
(b) Interprétese geométricamente la aplicación τ_θ y calcúlense sus subespacios invariantes.

10. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:

(a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
(b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
(c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

11. Sea E el espacio vectorial de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a+b+c=0$. Calcular una base de E y respecto de la misma calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a-2b \\ 2b-3c & 3c-a \end{pmatrix}$$

Deducir de lo anterior bases de $\ker T$ e $Im\, T$.

12. Hallar la matriz de una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por las condiciones:

(a) $f(1,0,0)$ es proporcional a $(0,0,1)$.
(b) $f^2 = f$.
(c) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x+z=0\}$.

¿Es f única?.

13. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo $T(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$. Se pide:

(a) Calcular la matriz de T en la base ordinaria.
(b) Calcular la matriz de T en la base $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (-1,0,0)$.
(c) Hallar una base de $\ker T$, $Im\, T$, precisando sus dimensiones.
(d) Calcular una base de $\ker T^2$. ¿Coincide este núcleo con el de T?. Razónese la respuesta.

14. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, z - y)$$

(a) Calcular la matriz asociada a T y con ella encontrar $\ker T$, $Im\, T$, $\ker T^2$ e $Im\, T^2$.
(b) Hallar bases de dichos subespacios vectoriales.

15. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_3,\ \ker T =< e_1 + e_2 >$$

Deducir la matriz de T y calcular $Im\, T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

16. Sea T una aplicación lineal y sean V y V' subespacios vectoriales de E y E' respectivamente. Demostrar que

(a) *Imagen de* $V = \{e' \in E' : e' = T(v)$ para algún $v \in V\}$ es un subespacio vectorial de E', el *subespacio imagen de* V *por la aplicación* T, que representaremos por $T(V)$.
(b) *Antiimagen de* $V' = \{e \in E : T(e) \in V'\}$ es un subespacio vectorial de E, el *subespacio antiimagen de* V' *por la aplicación* T, que representaremos por $T^{-1}(V)$.
(Observa que $T(E) = \operatorname{Im} T$ y $T^{-1}(0) = \ker T$)

17. Sea E el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 4. Se define $f\colon E \to E$, $T(p(x)) = p'(x)$.

(a) Probar que T es una aplicación lineal.
(b) Calcular $T^{-1}(3x^2 - 1)$.
(c) Calcular bases y dimensin de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

18. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$.

19. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del mismo. Dado el endomorfismo T de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 - e_2,\ T(e_2) = e_2 - e_3 + e_4,\ T(e_3) = e_1 - e_3 + e_4,\ e_1 + e_4 \in \ker T$$

Calcular la matriz de T y deducir bases de $\ker T$ e $Im\, T$. ¿Se verifica que $E = \ker T \oplus Im\, T$?.

20. Sea $E =< x, \sin x, \cos x >$. Calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por

$$T(f(x)) = f(0)x + f'(0)\sin x + f''(0)\cos x$$

en una base de E. Decidir si T es isomorfismo.

21. Dado el endomorfismo $T\colon E_3 \to E_3$ cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que para cualquier valor de λ la dimensión del subespacio imagen es 2. Hallar el núcleo y la imagen para $\lambda = -2$.

22. Considérese el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m - 1)y + (m + 1)z)$$

A partir de su matriz, demuéstrese que la dimensión del núcleo es 0 excepto para valores particulares de m. Para dichos valores, estudiar T.

23. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial E.

(a) Probar que los vectores $u'_1 = 2u_1 - u_2 + u_3,\ u'_2 = u_1 + u_3,\ u'_3 = 3u_1 - u_2 + 3u_3$ forman una base de E.
(b) Calcular las coordenadas del vector $u = u_1 - 4u_3$ en la base de (a).
(c) Hallar las coordenadas respecto de la base inicial del vector $v = -2u'_1 + 3u'_2 + u'_3$.

24. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de T en la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ siendo:

$$e_1 = e'_1,\ e_2 = \frac{1}{2}e'_2,\ e_3 = e'_3 + e'_1 - \frac{1}{2}e'_2$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Universidad de Salamanca
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. Espacio vectorial dual. Base dual. Funciones coordenadas

Sea E un k-espacio vectorial.
El conjunto E^* de las aplicaciones lineales de E en k, $E^* = \{E \xrightarrow{\omega} k \text{ lineales }\}$, es un k-espacio vectorial respecto de la suma de aplicaciones lineales y del producto de una aplicación lineal por un escalar.
E^* se llama *espacio dual* de E y los elementos de E^* se llaman *formas lineales*.

Teorema 1.1. (Base dual) *Si* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *es una base de* E *, las* n *formas lineales* $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ *definidas por* $\omega_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ *, para* $1 \leq i, j \leq n$*, forman una base de* E^**, la base dual de* $\{e_1, \dots, e_n\}$*. En particular,* $\dim_k E^* = \dim_k E$

Demostración.
• $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ generan E^*.
Sea $\omega \in E^*$ y $\omega(e_i) = \lambda_i \in k$ para $i = 1 \dots n$.
La forma lineal $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n$ coincide con ω sobre la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, $(\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n)(e_i) = \lambda_i = \omega(e_i)$, luego $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n = \omega$, pues dos aplicaciones lineales que coinciden sobre todos los vectores de una base son iguales.
• $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ son linealmente independientes.
Si $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n = 0$, para todo $i = 1 \dots n$ se verifica que $(\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n)(e_i) = \lambda_i = 0$. □

Las formas lineales ω_i son las *funciones coordenadas* sobre E, esto es, si $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ es $\omega_i(e) = x_i$.
Por otra parte, si $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ y $\omega = p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ se tiene:

$$\omega(e) = x_1p_1 + \cdots + x_np_n$$

2. Morfismo traspuesto

Dada una aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$, para cada $\theta \in E'^*$ la aplicación lineal $E \xrightarrow{\theta \circ T} k$ es una forma lineal $\theta \circ T \in E^*$, lo que permite definir una aplicación

$$\begin{aligned} E'^* &\xrightarrow{T^*} E^* \\ \theta &\mapsto \theta \circ T \end{aligned}$$

que es lineal: $T^*(\lambda\theta + \mu\theta') = (\lambda\theta + \mu\theta') \circ T = \lambda(\theta \circ T) + \mu(\theta' \circ T) = \lambda T^*(\theta) + \mu T^*(\theta')$.
T^* es la *aplicación lineal traspuesta* o *morfismo traspuesto* de T.

Proposición 2.1. *Si* A *es la matriz asociada al morfismo* $E \xrightarrow{T} E'$ *respecto de las bases* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *de* E *y* $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ *de* E'*, la matriz asociada al morfismo traspuesto* $E'^* \xrightarrow{T^*} E^*$ *respecto de las bases duales* $\{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$ *de* E'^* *y* $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *de* E^* *es la matriz traspuesta de* A*.*

Demostración. Si $B = (b_{ij})$ es la matriz de T^* en las bases duales y $A = (a_{ij})$ la matriz de T en las bases dadas, se tiene:

$$T^*(\omega'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\omega_i \Rightarrow b_{ij} = T^*(\omega'_j)(e_i) = \omega'_j(T(e_i)) = \omega'_j(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}e'_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega'_j(e'_k) = a_{ji}$$

□

Ejemplo 2.2. Dada la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \mapsto (x-2y+t, y+z, x-t)$$

Calculemos bases y dimensión de $\operatorname{Im} T^*$ y $\ker T^*$, siendo $(\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{T^*} (\mathbb{R}^4)^*$ su morfismo traspuesto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \operatorname{rg} A^t = \dim \operatorname{Im} T^* = 3 \Rightarrow \dim \ker T^* = 3-3 = 0$$

Se deduce:

$$\operatorname{Im} T^* = \{(1,-2,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1)\}, \quad \ker T^* = \{0\}$$

3. Cambio de base en el dual

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ su base dual en E^*. Y sean $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ otra base de E (base nueva de E) y $\{\bar{\omega}_1,\ldots,\bar{\omega}_n\}$ su base dual (base nueva de E^*). Si representamos por B la matriz del cambio de base en E y por B^* la matriz de cambio de base en E^*, se verifica:

$$B^* = (B^t)^{-1}$$

En efecto:
La aplicación que realiza el cambio de base de matriz B es

$$\langle \bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\rangle = E \xrightarrow{Id_B} E = \langle e_1,\ldots,e_n\rangle$$

y su morfismo traspuesto

$$\langle \omega_1,\ldots,\omega_n\rangle = E^* \xrightarrow{Id_{B^t}} E^* = \langle \bar{\omega}_1,\ldots,\bar{\omega}_n\rangle$$

es preciasamente el inverso del morfismo del cambio de base en E^* de matriz B^*, $(Id_{B^t})^{-1} = Id_{B^*}$, luego $B^* = (B^t)^{-1}$.
• *Cambio de base para formas lineales*
Si $\omega = p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n = \bar{p}_1\bar{\omega}_1 + \cdots + \bar{p}_n\bar{\omega}_n$, esto es, $(p_1,\ldots,p_n)$ son las coordenadas antiguas de ω y $(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_n)$ sus coordenadas nuevas , se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{pmatrix} = B^t \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \ldots & \bar{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \cdot B$$

Ejemplo 3.1. Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual.
(a) Probar que los vectores $\bar{e}_1 = e_1 - e_2$, $\bar{e}_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$ y $\bar{e}_3 = e_1 + e_2$ forman una nueva base de E y calcular su base dual $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$.
(b) Calcular la expresión de la forma lineal $\omega = 3\omega_1 + 2\omega_2$ en la base $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$
Solución
(a) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ es una base de E y B es la matriz del cambio de base.

$$B^* = (B^t)^{-1} = \frac{1}{|B|} AdjB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_1 = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 \\ \bar{\omega}_2 = -\omega_3 \\ \bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{3}{2}\omega_3 \end{cases}$$, pues las columnas de B^* son las coordenadas de las formas lineales de la nueva base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ de E^* respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega = \bar{\omega}_1 + 7\bar{\omega}_2 + 5\bar{\omega}_3$.

4. Espacio bidual. Teorema de Reflexividad

El *espacio bidual*, E^{**}, es el dual del espacio dual E^*:

$$E^{**} = \{E^* \to k \text{ lineales}\}, \quad \dim_k E^{**} = \dim_k E^* = \dim_k E\,.$$

Teorema 4.1. (Reflexividad). *Si E es un k-espacio vectorial de dimensión finita, la aplicación $E \xrightarrow{\phi} E^{**}$ definida por $\phi(e)(\omega) = \omega(e)$, para cada $e \in E$ y $\omega \in E^*$, es un isomorfismo.*

Demostración.
• ϕ es lineal.
$\phi(\lambda e + \mu e')(\omega) = \omega(\lambda e + \mu e') = \lambda\omega(e) + \mu\omega(e') = \lambda\phi(e)(\omega) + \mu\phi(e')(\omega) = (\lambda\phi(e) + \mu\phi(e'))(\omega)$, para toda $\omega \in E^*$.
• ϕ es inyectiva.
Si $e \in \ker\phi$ es $\phi(e) = 0$, luego $\phi(e)(\omega) = \omega(e) = 0$ para toda $\omega \in E^*$. En particular, si $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es la base dual de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en la que las coordenadas del vector e son $(x_1, \ldots, x_n)$, resulta que $\omega_i(e) = x_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, lo que prueba que $e = 0$.
• ϕ es epiyectiva pues es inyectiva y $\dim_k E^{**} = \dim_k E$. □

Observación. El teorema de Reflexividad permite identificar los vectores de E como elementos del espacio bidual E^{**} en el modo $e(\omega) = \omega(e)$. De manera que si $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ son las funciones coordenadas sobre E, los vectores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de su base dual se pueden entender como las funciones coordenadas sobre el espacio dual E^*.

5. Subespacio incidente. Dimensión. Propiedades

Sea V un subespacio de E. Se define el siguiente subconjunto de E^*:

$$V^0 = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0 \text{ , para todo } v \in V\}$$

Teorema 5.1. *V^0 es un subespacio de E^*, el subespacio incidente con V, y su dimensión es:*

$$\dim_k V^0 = \dim_k E - \dim_k V$$

Demostración.
1) V^0 es cerrado por combinaciones lineales.
Si $\omega, \omega' \in V^0$ y $\lambda, \mu \in k$, para cada $v \in V$ se tiene: $(\lambda\omega + \mu\omega')(v) = \lambda\omega(v) + \mu\omega'(v) = 0 \Rightarrow \lambda\omega + \mu\omega' \in V^0$.
2) Construyamos una base de V^0.
Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V. Ampliemos esta base para formar una base $\{v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de E y sea $\{\theta_1, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ su base dual.
Probaremos que las $n - m$ formas lineales $\{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ forman una base de V^0:

- $\{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ están en V^0, ya que $\theta_{m+1}(v_i) = 0, \ldots, \theta_n(v_i) = 0$, para $i = 1, \ldots, m$, pues $\{\theta_1, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ es la base dual de $\{v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$.
- $\{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ generan V^0.
  Si $\omega \in V^0 \subseteq E^*$ es $\omega = \lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_m\theta_m + \lambda_{m+1}\theta_{m+1} + \cdots + \lambda_n\theta_n$ y como $\omega(v) = 0$ para todo $v \in V$, se tiene que $\omega(v_i) = \lambda_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Luego $\omega = \lambda_{m+1}\theta_{m+1} + \cdots + \lambda_n\theta_n$.

- $\{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_n\}$ son linealmente independientes pues forman parte de una base.

□

Proposición 5.2. Propiedades del incidente.
(1) $E^0 = \{0\}\,, \quad \{0\}^0 = E^*$.
(2) *Si* E_1 *y* E_2 *son subespacios de* E *tales que* $E_1 \subseteq E_2$ *se verifica* $E_1^0 \supseteq E_2^0$.
(3) *Si* V *es un subespacio de* E, $V^{00} = V$.
(4) *Si* E_1 *y* E_2 *son subespacios de* E *se verifica:*

$$(E_1 + E_2)^0 = E_1^0 \cap E_2^0\,, \quad (E_1 \cap E_2)^0 = E_1^0 + E_2^0$$

(5) *Si* $E = E_1 \oplus E_2$ *también* $E^* = E_1^0 \oplus E_2^0$
(6) *Si* $E \xrightarrow{T} E'$ *es una aplicación lineal y* $E'^* \xrightarrow{T^*} E^*$ *su morfismo traspuesto, se verifica:*

$$\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^0\,, \quad \operatorname{Im} T^* = (\ker T)^0$$

Demostración.
(1) $\dim_k E^0 = \dim_k E - \dim_k E = 0 \Rightarrow E^0 = \{0\}$.
$\{0\}^0 \subseteq E^*$ y $\dim_k \{0\}^0 = \dim_k E - 0 = \dim_k E^* \Rightarrow \{0\}^0 = E^*$.
(2) Si $\omega \in E_2^0$ es $\omega(e_2) = 0$ para todo $e_2 \in E_2$ y como $E_1 \subseteq E_2$ también es $\omega(e_1) = 0$ para todo $e_1 \in E_1$, luego $\omega \in E_1^0$.
(3) Si $e \in V$ para toda $\omega \in V^0$ es $\omega(e) = 0$ y por reflexividad $e(\omega) = 0$, luego $e \in V^{00}$, así $V \subseteq V^{00}$ y como $\dim_k V^{00} = \dim_k E^* - \dim_k V^0 = \dim_k E^* - \dim_k E - \dim_k V = \dim_k V$ es $V = V^{00}$.
(4)

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \subseteq E_1 + E_2 \Rightarrow E_1^0 \supseteq (E_1 + E_2)^0 \\ E_2 \subseteq E_1 + E_2 \Rightarrow E_2^0 \supseteq (E_1 + E_2)^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (E_1 + E_2)^0 \subseteq E_1^0 \cap E_2^0$$

Por otra parte, para cada $\omega \in E_1^0 \cap E_2^0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega \in E_1^0 \Rightarrow \omega(e_1) = 0\,, \forall e_1 \in E_1 \\ \omega \in E_2^0 \Rightarrow \omega(e_2) = 0\,, \forall e_2 \in E_2 \end{array}\right\}$, luego $\omega(e_1 + e_2) = 0$ para todo $e_1 + e_2 \in E_1 + E_2$ y por tanto $\omega \in (E_1 + E_2)^0$, lo que prueba que $E_1^0 \cap E_2^0 \subseteq (E_1 + E_2)^0$ y así $(E_1 + E_2)^0 = E_1^0 \cap E_2^0$.
(5) Si $E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E = E_1 + E_2 \Rightarrow E^0 = (E_1 + E_2)^0 \Rightarrow \{0\} = E_1^0 \cap E_2^0 \\ E_1 \cap E_2 = \{0\} \Rightarrow (E_1 \cap E_2)^0 = \{0\}^0 \Rightarrow E_1^0 + E_2^0 = E^* \end{array}\right\}$, luego $E^* = E_1^0 \oplus E_2^0$.
(6)

$$(\operatorname{Im} T)^0 = \{\omega' \in E'^* : \omega'(T(e)) = 0\,, \forall e \in E\} = \{\omega' \in E'^* : T^*\omega' = 0\} = \ker T^*$$
$$\operatorname{Im} T^* = \{\omega \in E^* : \omega = T^* \backslash \omega' = \omega' \circ T\} == \{\omega \in E^* : \omega(e) = 0\,, \forall e \in \ker T\} = (\ker T)^0$$

□

6. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio

Sea V un subespacio de E y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V. Para todo $e \in V$ se tiene:
Ecuación paramétrico vectorial de V: $e = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$, para ciertos $\lambda_i \in k$.
Si se expresa esa ecuación en coordenadas respecto de una base de E, $e = (x_1, \ldots, x_n)$, $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, se obtienen unas *ecuaciones paramétricas de* V:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \cdots + & \lambda_m a_{1m} \\ \vdots \quad\; \vdots & \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{n1} + \cdots + & \lambda_m a_{nm} \end{array}\right.$$

De la ecuación paramétrico vectorial se sigue que la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $e, v_1, \ldots, v_m$, respecto de una base de E, tiene rango m,

$$\operatorname{rg}(e, v_1, \ldots, v_m) = m, \text{ para todo } e \in V\,.$$

De modo que, elegido un menor de orden m no nulo, esta condición equivale a la anulación de $n-m$ menores de orden $m+1$, que dan el número mínimo de ecuaciones linealmente independientes que definen unas *ecuaciones implícitas de* V.

Ejemplo 6.1. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{v_1 = (1,0,1,1), v_2 = (0,1,1,1), v_3 = (1,-1,0,0)\}$. Calculemos unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de V.
$\dim V = \operatorname{rg}(v_1, v_2, v_3) = 2, V = \langle v_1, v_2\rangle$.
• Ecuación paramétrico vectorial de V: $e = \lambda v_1 + \mu v_2$, para todo $e \in V$.
• Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$.
• Ecuaciones implícitas

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -x-y+z=0 \\ \\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -x-y+t=0 \end{array} \right\}$$

7. Subespacio incidente y ecuaciones implícitas

Sea V un subespacio de E de dimensión m.
Por reflexividad se tiene:

$$V = \{e \in E : e(\omega) = \omega(e) = 0 \text{ para todo } \omega \in V^0\}$$

Luego si se conoce una base del subespacio incidente con V, $V^0 = \langle \theta_1, \ldots, \theta_{n-m}\rangle$, el subespacio V queda determinado por las $n-m$ escuaciones:

$$V = \{e \in E : \theta_1(e) = \cdots = \theta_{n-m}(e) = 0\}\,,$$

que en coordenadas respecto de una base de E y su base dual dan unas ecuaciones implícitas de V.

Ejemplo 7.1. Sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ su base dual. Si V es el subespacio de E del que se conoce una base $\{\theta_1 = 2\omega_1 - 3\omega_3 + \omega_4, \theta_2 = \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 - 3\omega_4\}$ de su subespacio incidente V^0, unas ecuaciones implícitas de V son:

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1(e) = 0 \\ \theta_2(e) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{e = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4} \begin{cases} 2x - 3z + t = 0 \\ x - 2y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

Recíprocamente si se conocen unas ecuaciones implícitas del subespacio V se tiene automáticamente una base de su subespacio incidente V^0.

$$V \equiv \left\{\begin{array}{l} x - y + 2t = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V^0 = \langle \omega_1 - \omega_2 + 2\omega_4, 2\omega_2 - 3\omega_3\rangle\,.$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

8. Problemas propuestos

1. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Probar que las formas lineales $\bar{\omega}_1 = 2\omega_1 - 3\omega_2$, $\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ y $\bar{\omega}_1 = \omega_2 + \omega_3$ forman una base de E^* y calcular su base dual $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

2. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, $E = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Demostrar que los polinomios $1 + x^2$, $x + x^2$, $1 + x + x^2$ forman una base de E.

(b) Sea $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ la base dual de la base anterior y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de $\{1, x, x^2\}$. Calcular las coordenadas de $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

(c) Considerando el morfismo derivada $D\colon E \to E$ dado por $D(p(x)) = p'(x)$, calcular las coordenadas de la imagen de ω_1 en la base $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ por el morfismo inducido en el dual.

3. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Sea T el endomorfismo de E definido por $T(x, y, z) = (-3x + 2y + z, 3x + y + 5z, -3x - 3z)$. Si $T^*\colon E^* \to E^*$ es el endomorfismo inducido en el dual, averigua si las formas lineales $T^*(\omega_1 + 2\omega_2), T^*(2\omega_1 + \omega_2), T^*(\omega_1 + \omega_2)$ forman una base de E^*.

4. Sea E el espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de la base $\{1, x, x^2\}$. Se definen las aplicaciones $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\colon E \to \mathbb{R}$ por las fórmulas:

$$\overline{\omega}_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx\,, \quad \overline{\omega}_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)dx\,, \quad \overline{\omega}_3(p(x)) = \int_0^1 x^2p(x)dx$$

Pruébese que $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ es una base de E^*. Hállense las coordenadas de dichos elementos respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Determinar en E una base para la cual $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ sea su base dual.

5. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (2, 5, 4, 0)$ y sea E_2 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (0, 5, 5, 0)$, $u_2 = (5, 5, 7, 0)$, $u_3 = (-10, 1, 5, 1)$.

(a) Calcula una base y la dimensión de los subespacios E_1, E_2 $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.

(b) Halla los subespacios incidentes de los del apartado anterior.

6. En un espacio vectorial de dimensión 5 sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ su base dual. Sea F el subespacio generado por los vectores

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ u_2 = e_2 - e_4,\ u_3 = e_3 + 2e_4 - e_5$$

Hállese la dimensión de F y calcúlese una base de su espacio incidente.

7. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Dada la aplicación lineal $T\colon E^* \to E$ definida por

$$T(\omega_1) = e_1 - e_2,\ T(\omega_2) = 2e_1 + e_2 + e_3,\ T(\omega_3) = 3e_2 + e_3$$

Calcular bases de $\ker T$, $Im\,T$, $(\ker T)^\circ$, $(Im\,T)^\circ$.

8. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(-2, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(-6, 7, 4, 3)$.

9. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:

$$E_1 =< (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, -1) >$$
$$E_2 =< (1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, 2), (1, 2, -1, 4) >$$
$$E_3 =< (1, 2, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (0, -1, 2, 0), (-1, 1, 3, 0) >$$

Hallar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de dichos subespacios.

10. Se considera en $\mathbb{Q}^5$ el subespacio V determinado por las ecuaciones $2x_1-x_2+x_4-x_5=0$, $4x_1+2x_2+x_5=0$, $3x_2-x_4+2x_5=0$. Determinar las ecuaciones paramétricas de V y calcular un suplementario.

11. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x-y+z=0$. Deducir una base del mismo y calcular respecto de ella las coordenadas del vector $(1,3,1)$.

12. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ que tiene por ecuaciones implícitas $x+y-z+t=0$, $x-y+z=0$.

13. Sean E_1 y E_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 \equiv \langle (1,1,1,0),(0,-1,-1,0),(2,1,1,0)\rangle$$

$$E_2 \equiv \begin{cases} x+t=0 \\ x-y+z+2t=0 \end{cases}$$

(a) Calcular bases y dimensiones de E_1, E_2, $E_1\cap E_2$ y E_1+E_2.
(b) ¿Es cierto que $\mathbb{R}^4=E_1\oplus E_2$?. Calcular un suplementario de E_1.
(c) Calcular una base del subespacio incidente $(E_1)^\circ$ y las ecuaciones implícitas de E_1.
(d) Calcular unas ecuaciones paramétricas de E_2.

14. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual.

(a) Dados los subespacios $F =< e_1-e_2, 2e_1-e_3 >$ y $F' =< 2e_2+e_3, e_1+e_2+e_3 >$, calcula una base de $(F\cap F')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $F\cap F'$.
(b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$ definidas por

$$\bar\omega_1(e)=x+y+z, \quad \bar\omega_2(e)=y-2z, \quad \bar\omega_3(e)=x+y$$

para cada vector $e=xe_1+ye_2+ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$.
(c) Calcula las coordenadas del vector $u=e_1-e_2+e_3$ en la base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ y el incidente del subespacio $< u >$ en función de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. Subvariedades afines de un espacio vectorial

Sea E un k-espacio vectorial de dimensión n y sean V un subespacio de E y e_0 un vector de E. El conjunto

$$H = e_0 + V$$

es una **subvariedad afín de vector de posición e_0 y subespacio director V**.
Se llama dimensión de la subvariedad afín H a la dimensión de su subespacio director, $\dim_k H = \dim_k V$.
Las subvariedades afines de dimensión 0 son los *puntos*, las de dimensión 1 las *rectas*, las de dimensión 2 *los planos* y las de dimensión $n-1$ los *hiperplanos*.
Las subvariedades afines que pasan por el origen son los subespacios.

Definición 1.1. *Dos subvariedades afines son paralelas* si el subespacio director de una de ellas está contenido en el de la otra.
Si $\dim_k H \leq \dim_k H'$, las subvariedades afines $H = e_0 + V$, $H' = e'_0 + V'$ son paralelas si $V \subseteq V'$ o lo que es equivalente $V^0 \supseteq V'^0$.

2. Ecuaciones paramétricas e implícitas de una subvariedad afín H

Sea $H = e_0 + V$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de V.
Ecuación paramétrico vectorial de H:
$\forall e \in V$ es $e = e_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$, para ciertos $\lambda_i \in k$.
Expresando esta ecuación en coordenadas respecto de una base de E se obtienen unas cuaciones paramétricas de H.
Ecuaciones implícitas de H:
De la ecuación paramétrico vectorial se sigue que la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $e - e_0, v_1, \ldots, v_m$, respecto de una base de E, tiene rango m,

$$\operatorname{rg}(e - e_0, v_1, \ldots, v_m) = m, \text{ para todo } e \in H\,.$$

De modo que, elegido un menor de orden m no nulo, esta condición equivale a la anulación de $n-m$ menores de orden $m+1$, que dan el número mínimo de ecuaciones linealmente independientes que definen unas *ecuaciones implícitas de H*.
Por otra parte, si en vez de una base del subespacio director V de H se conoce una base de su subespacio incidente $V^0 = \langle \theta_1, \ldots, \theta_{n-m} \rangle$, se pueden obtener directamente unas *ecuaciones implícitas* de $H = e_0 + V$.

$$\forall e \in H \text{ es } e - e_0 \in V \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \theta_1(e - e_0) = 0 \\ \vdots \\ \theta_{n-m}(e - e_0) = 0 \end{array} \right\}$$

Ejemplo 2.1. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,1,1,2), v_3 = (0,1,2,2)\}$. Calculemos unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de la subvariedad afín H de vector de posición $e_0 = (1,0,0,2)$ y subespacio director V.
$\dim H = \dim V = 2$ y $V = \langle v_1, v_3 \rangle$.

• Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + 2\mu \\ t = 2 + 2\mu \end{cases}$.

• Ecuaciones implícitas

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 2 \\ t-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow x + 2y - z = 1 \\ \\ \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ t-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 2y - t = -2 \end{array} \right\}$$

3. Subvariedad afin intersección. Posiciones relativas. Subvariedad afín suma

Sean H y H' subvariedades afines de E.

• La **subvariedad afín intersección** $H \cap H'$ es la máxima subvariedad afín contenida en H y en H'. Los puntos de $H \cap H'$ son las soluciones del sistema lineal determinado por las ecuaciones implícitas de H y de H'.
Dos subvariedades afines **se cortan** *si tienen algún punto en común*, por tanto, H y H' no se cortan si $H \cap H' = \emptyset$.
Dos subvariedades afines **se cruzan** *si ni son paralelas ni se cortan.*

• La **subvariedad afín suma** $H + H'$ es la mínima subvariedad afín que contiene a H y a H'.
Si $H = e_0 + \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ y $H' = e'_0 + \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$, su suma es:

$$H+H' = e_0+\langle e_0-e'_0, v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_s \rangle \text{ y } \dim(H+H') = \operatorname{rg}(e_0-e'_0, v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_s)$$

Ejemplo 3.1. Considérense las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ z + t = 2 \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

(a) Calcula un vector de posición y el subespacio director de la recta r y del plano π.
(b) Averigua si la recta r es paralela al plano π.
(c) Calcula la subvariedad afín intersección $r \cap \pi$.
(d) Calcula la mínima subvariedad afín que contiene a ambas.
(e) Estudia la posición relativa del plano π y el plano $\pi' \equiv \begin{cases} 2x - z + t = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

Solución.

(a) $r = \{(x, 1-x, -1+x, 3-x) \in \mathbb{R}^4\}$, $\pi = \{(x, y, -1+2x, 4-3x-y) \in \mathbb{R}^4\}$

$$r = e_0 + \langle v \rangle, \quad e_0 = (0, 1, -1, 3), v = (1, -1, 1, -1)$$
$$\pi = e'_0 + \langle u_1, u_2 \rangle, \quad e'_0 = (0, 0, -1, 4), u_1 = (1, 0, 2, -3), u_2 = (0, 1, 0, -1)$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

(b) La recta y el plano *no son paralelos*, ya que el subespacio director de r, $\langle v\rangle$, no está contenido el subespacio director de π,$\langle u_1, u_2\rangle$, pues

$$\operatorname{rg}(v, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

(c) Sustituyendo las coordenadas de un punto cualquiera $(\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda, 3-\lambda)$ de r en las ecuaciones del plano π se tiene

$$\begin{cases} \lambda + 1 - \lambda - 1 + \lambda + 3 - \lambda = 3 \\ 2\lambda + 1 + \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Luego la recta y el plano se cortan en el punto $P = (0, 1, -1, 3)$, $r \cap \pi = P$.

(d) $r+\pi = e_0+\langle e_0-e_0', v, u_1, u_2\rangle$, pero $e_0-e_0' = u_2$, luego $r+\pi = e_0+\langle v, u_1, u_2\rangle$ y $\dim(r+\pi) = 3$. Luego la mínima subvariedad afín que las contiene es el hiperplano de vector de posición e_0 y subespacio director $\langle v, u_1, u_2\rangle$. Calculemos su ecuación implícita:

Para todo $e = (x, y, z, t) \in r + \pi$ es $e - e_0 \in \langle v, u_1, u_2\rangle$, luego $\operatorname{rg}(e - e_0, v, u_1, u_2) = 3$ y por tanto $\det(e - e_0, v, u_1, u_2) = 0$, que en coordenadas da la ecuación implícita de $r + \pi$:

$$r + \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 0 & 1 \\ z+1 & 1 & 2 & 0 \\ t-3 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r + \pi \equiv x + y + z + t - 3 = 0$$

(e) Discutamos el sistema lineal determinado por las ecuaciones implícitas de π y de π'.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ 2x - z = 1 \\ 2x - z + t = 2 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\operatorname{rg} A = 4$ y por tanto coincide con el rango de la matriz ampliada. El sistema es pues compatible y el conjunto de soluciones, que es la subvariedad afín intersección $\pi \cap \pi'$, tiene dimensión 0, luego se reduce a un punto. Es decir, los planos π y π' *se cortan en un punto* Q, que se obtiene resolviendo el sistema, $Q = (1, 0, 1, 1)$.

4. Problemas propuestos

1. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por el punto $P = (1, 2, 1, 2)$ y cuya dirección queda determinada por el vector $(1, 3, -2, 7)$.

2. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del hiperpano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $P = (0, 1, 2, -4)$ y cuyo subespacio director es $V = \langle(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 2)\rangle$.

3. En un espacio vectorial de dimensión 4, hállese la recta que pasa por el origen y corta a las dos rectas siguientes:

$$r_1\colon x = 2 + 3\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = -1 + 2\lambda,\ t = 3 - 2\lambda$$
$$r_2\colon x = 7\lambda,\ y = 1,\ z = 1 + \lambda,\ t = -1 + 2\lambda$$

4. Hállese el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por las rectas:

$$r_1\colon 2x - y = 0,\ x + z = 0,\ 3x - t = 0$$
$$r_2\colon x + y - 3 = 0,\ 2x - z + 1 = 0,\ t = 0$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

5. Hallar la ecuación del haz de hiperplanos que contienen al plano que pasa por los puntos $(1,-2,-3,1)$, $(0,0,1,5)$, $(3,-1,5,0)$.

6. Hállese la dimensión de la mínima subvariedad afín que contiene a dos planos bidimensionales que se cruzan. Calcúlese la dimensión de la mínima subvariedad afín que pasa por los puntos:

$$(-1,2,-1,0,4),(0,-1,3,5,1),(4,-2,0,0,-3),(3,-1,2,5,2)$$

7. Hállense las ecuaciones paramétricas de la mínima subvariedad afín que pasa por las rectas:

$$r\colon x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$$

$$r'\colon \frac{x_1-1}{3} = \frac{x_2}{5} = x_3 - 2 = \frac{x_4+1}{7} = \frac{x_5}{-4}$$

8. Dadas las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$H =< (0,-1,0,1),(1,1,0,1),(0,0,1,0) > \qquad H' =< (-2,1,1,0),(-3,0,0,1) >$$

(a) Calcular sus ecuaciones implícitas.
(b) Estudiar su posición relativa.
(c) Calcular la mínima subvariedad afín que las contiene.

9. Hallar la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $(1,0,0,0)$ y cuyo subespacio director es el núcleo del endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base estándar es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Sea V el plano de los polinomios de grado menor o igual que 1. Sea $\omega\colon E \to \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $\omega(p(x)) = \int_0^1 x \cdot p(x)\,dx$. Considerando la base $\{1, x, x^2\}$, calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $1+x^2$ y es paralela a la recta intersección del plano $\omega^{-1}(2)$ con V.

11. Calcular el plano que contiene a la recta $s \equiv x = y = z = t+1$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y+2z=0 \\ z+3t=1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \frac{x-2}{2} = y = \frac{z}{-1} = t+1$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO I.

1. Espacios Vectoriales

1.1. Espacios y subespacios vectoriales.

1. Demuéstrese que el conjunto $C = \{(x, y, y, -x), x, y \in \mathbb{R}\}$ con la operación:
$$(x, y, y, -x) + (w, z, z, -w) = (x + w, y + z, y + z, -(x + w))$$
y con el producto escalar para $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda(x, y, y, -x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda y, -\lambda x)\,,$$
es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
2. Averiguar si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial real.
   a) $V = \{(a, b, 0) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c) \colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c) \colon a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}$
   d) $V = \{(a, b, c) \colon a = b + c\}$
   e) $V = \{(a, b, c) \colon a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
3. Determina si los siguientes subconjuntos de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:
   a) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
   b) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   c) El conjunto de las matrices antisimétricas.
   d) El conjunto de las matrices A que cumplen $A^2 = A$.
   e) El conjunto de matrices cuyo determinante no es cero.

1.2. Dependencia lineal, bases, dimensión y coordenadas.

4. Pruébese que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 0)$ coincide con el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(1, 0, 1)$.
5. Demostrar que los vectores $(m, 1, 0)$, $(-1, m, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, sea quien sea m. Comprobar que esta propiedad no se cumple en $\mathbb{C}^3$.
6. Determinar x e y en el vector $(3, 2, x, y) \in \mathbb{Q}^4$ para que pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$, $(1, 2, 3, 1)$.
7. Calcula una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:
   a) $V = \{(a, b, 0) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c) \colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c) \colon a = b + c\}$
8. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.
9. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual que 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.
   a) Demostrar que los polinomios $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ forman una base.
   b) Hallar las coordenadas del polinomio $3 + 2x + 5x^2$ en dicha base.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO I.

2. Averiguar si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial real.
   a) $V = \{(a,b,0)\colon a,b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a,b,c)\colon a+b+c=0\}$
   c) $V = \{(a,b,c)\colon a^2+b^2+c^2 \geq 1\}$
   d) $V = \{(a,b,c)\colon a=b+c\}$
   e) $V = \{(a,b,c)\colon a,b,c \in \mathbb{Q}\}$

   Solución:

   a) Por el teorema de caracterización de subespacios vectoriales basta demostrar si para cualesquiera $v, v' \in V$ y para cualesquiera escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda v + \mu v' \in V$. En efecto, sean $v = (a,b,0), v' = (a',b',0) \in V$ con $a,b \in \mathbb{R}$, se tiene (suma y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$):
   $$\lambda v + \mu v' = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', 0)\,.$$
   Como $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial se verifica que $\lambda a + \mu a' \in \mathbb{R}$ y $\lambda b + \mu b' \in \mathbb{R}$ y por lo tanto (definición de V) se concluye que $\lambda v + \mu v' \in V$.
   b) Sean $v = (a,b,c), v' = (a',b',c') \in V$ vectores cualesquiera de V, es decir, se tiene:
   $$a+b+c=0 \quad \text{y} \quad a'+b'+c'=0\,.$$
   Veamos que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que:
   $$\lambda v + \mu v' = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \in V,$$
   es decir, hemos de comprobar si:
   $$\lambda a + \mu a' + \lambda b + \mu b' + \lambda c + \mu c' = 0\,.$$
   Efectivamente, basta sacar factor común a λ y μ ($\mathbb{R}$ es espacio vectorial) y usar que $a+b+c=0$ y $a'+b'+c'=0$.
   c) V no es subespacio pues $(0,0,0) \notin V$ (ya que $0^2+0^2+0^2 \not\geq 1$).
   d) Se resuelve de modo análogo a *b)*.
   e) Veamos que V no es $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para lo cual comprobaremos que la multiplicación por escalares no es cerrada. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v = (a,b,c) \in V$, es decir, $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Entonces $\lambda v = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \notin V$ porque λa, λb y λc no tienen por qué ser números racionales. Tómese por ejemplo $\lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $a = 1 \in \mathbb{Q}$.

7. Calcula una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:
   a) $V = \{(a,b,0)\colon a,b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a,b,c)\colon a+b+c=0\}$
   c) $V = \{(a,b,c)\colon a=b+c\}$

   Solución:

   a) $V = \{(a,b,0)\colon a,b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0,0)+b(0,1,0)\colon a,b \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle$. Luego V está generado por $(1,0,0),(0,1,0)$, y como estos vectores no son proporcionales, son linealmente independientes (L.I.) y forman base.
   b)
   $$V = \{(a,b,c)\colon a+b+c=0\} = \{(a,b,c)\colon c=-a-b\} = \{(a,b,-a-b)\colon a,b \in \mathbb{R}\} =$$
   $$= \{a(1,0,-1)+b(0,1,-1)\colon a,b \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$$
   c)
   $$V = \{(a,b,c)\colon a=b+c\} = \{(b+c,b,c)\colon b,c \in \mathbb{R}\} = \{b(1,1,0)+c(1,0,1)\colon b,c \in \mathbb{R}\} =$$
   $$= \langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle$$

8. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix}5&3\\1&1\end{pmatrix}$ respecto de esta base.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

SOLUCIÓN: Por la teoría sabemos que el k-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 es de dimensión 4 y por tanto, para que 4 vectores (i.e. 4 matrices) formen base basta que sean L.I. Sean $a, b, c, d \in k$ y supongamos que:

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

veamos que entonces $a = b = c = d = 0$. En efecto, por definición de suma de matrices y producto de matrices por escalares la ecuación anterior se traduce en:

$$\begin{pmatrix}a+b+c & b+c\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

de donde resulta que $a = b = c = d = 0$.

Para calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ es esta base hemos de utilizar el teorema de caracterización de una base: "todo vector de un espacio vectorial se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de la base", los coeficientes de dicha combinación lineal (que llamaremos α, β, γ, δ) son precisamente las coordenadas que se buscan.

$$\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

Luego las coordenadas son $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ y $\delta = 1$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO II.

1.3. Suma, intersección y suma directa de subespacios.

10. Sea F el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1,1,-1)$ y G el subespacio de ecuaciones $3x-y=0$, $2x+z=0$. Determinar $F\cap G$.

11. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 =< (1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0) >$ y $E_2 =< (0,1,1,0),(1,1,3,0),(-2,1,1,1) >$.
    a) Calcular bases y dimensiones de E_1, E_2, E_1+E_2, $E_1\cap E_2$.
    b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$?
    c) Calcula dos subespacios suplementarios diferentes de E_1.

12. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por los siguientes vectores:
$$E_1 =< (1,0,1,1),(0,1,1,1) >, \quad E_2 =< (1,-1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1) >$$
    Se pide:
    a) Hallar las dimensiones de E_1, E_2, E_1+E_2, $E_1\cap E_2$.
    b) Estudiar si $E_1+E_2=\mathbb{R}^4$.
    c) ¿E_1 y E_2 son subespacios suplementarios?

13. Sean E y E' dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:
$$E=\{(a,b,c)\colon a=b=c\}, \quad E'=\{(0,b,c)\colon b,c\in\mathbb{R}\}$$
    Demostrar que $\mathbb{R}^3 = E\oplus E'$.

14. Sea $E=M(2,\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea V el subconjunto de E definido por:
$$V=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in E : 2x-y+t=0, x=z\right\}.$$
    a) Probar que V es un subespacio vectorial de E y calcular su dimensión y una base.
    b) Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\in V$ en la base elegida en el apartado anterior.
    c) Calcular un suplementario de V.

15. Sean los subespacios de $\mathbb{C}^3$:
$$E=\langle (1,2i,-1+i),(2,0,1+2i)\rangle \quad \text{y}$$
$$F=\langle (3+i,1-i,1),(-3,1+4i,5i)\rangle.$$
    Describe $E+F$ y $E\cap F$. ¿Están E y F en suma directa? ¿Pertenece $e=(i,2+2i,1-3i)$ a alguno de estos subespacios?

16. Sea $E=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $V=\{p(x)\in E : p(1)=0\}$.
    a) Probar que V es un subespacio de E y calcular su dimensión y una base.
    b) Calcular las coordenadas del polinomio $x^2-3x+2\in V$ respecto de la base del apartado anterior.
    c) Encuentra un subespacio suplementario de V.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO II.

11. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 =< (1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0) >$ y $E_2 =< (0,1,1,0),(1,1,3,0),(-2,1,1,1) >$.
   a) Calcular bases y dimensiones de E_1, E_2, E_1+E_2, $E_1\cap E_2$.
   b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$?
   c) Calcula dos subespacios suplementarios diferentes de E_1.

   Solución:

   a) El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ es no nulo y por lo tanto $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3$ y los vectores dados forman base. Análogamente se demuestra que $\dim_{\mathbb{R}} E_2 = 3$ y de nuevo los vectores dados forman base de E_2. Para calcular una base de E_1+E_2 observemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

   luego $\dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = 4$ y una base está formada por los vectores:

$$\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0),(-2,1,1,1)\}\,.$$

   Utilizando la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = \dim_{\mathbb{R}} E_1 + \dim_{\mathbb{R}} E_2 - \dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2)$$

   se sigue que $\dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2) = 2$. Como $(0,1,1,0)$ y $(1,1,3,0)$ son dos vectores L.I. que están en E_2 y en E_1 (pues el determinante de la matriz que forma cada uno de ellos con los vectores de la base de E_1 es nulo) y la dimensión de $E_1\cap E_2$ es 2, entonces forman base de la intersección:

$$E_1\cap E_2 = \langle (0,1,1,0),(1,1,3,0)\rangle$$

   b) Para que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$ ha de verificarse que $\mathbb{R}^4 = E_1+E_2$ y $E_1\cap E_2 = \{0\}$. Por el apartado anterior es cierto que $\mathbb{R}^4 = E_1+E_2$, pero $\dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2) = 2$. Luego no es cierto que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$.

   c) Para calcular un suplementario a E_1 basta con ampliar su base a una de $\mathbb{R}^4$, para lo cual es suficiente con dar un vector de $\mathbb{R}^4$ de modo que el determinante de la matriz que forma con los 3 vectores de la base de E_1 sea no nulo. Se deduce entonces que los subespacios $V_1 = \langle(-2,1,1,1)\rangle$ y $V_2 = \langle(0,0,0,1)\rangle$ son dos subespacios suplementarios distintos de E_1, es decir:

$$E_1\oplus V_1 = \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad E_1\oplus V_2 = \mathbb{R}^4\,.$$

16. Sea $E = \langle 1, x, x^2, x^3\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $V = \{p(x)\in E : p(1) = 0\}$.
   a) Probar que V es un subespacio de E y calcular su dimensión y una base.
   b) Calcular las coordenadas del polinomio $x^2-3x+2\in V$ respecto de la base del apartado anterior.
   c) Encuentra un subespacio suplementario de V.

   Solución:

   a) Por definición, todos los polinomios en V tienen la raíz 1, luego si $p(x)\in V$ se puede escribir:

$$p(x) = (x-1)\cdot\bar{p}(x)$$

   donde $\bar{p}(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a 2. Denotemos $\mathbb{R}_2[x]$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.
   Sean entonces $p(x), q(x)\in V$ (es decir, $p(x) = (x-1)\cdot\bar{p}(x)$ y $q(x) = (x-1)\cdot\bar{q}(x)$ con $\bar{p}(x),\bar{q}(x)\in\mathbb{R}_2[x]$) y veamos que para todos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$\lambda p(x) + \mu q(x)\in V\,.$$

   Si denotamos $h(x) = \lambda p(x)+\mu q(x)$, basta ver que $h(x) = (x-1)\bar{h}(x)$ donde $\bar{h}(x)\in\mathbb{R}_2[x]$. En efecto:

$$h(x) = \lambda p(x)+\mu q(x) = \lambda(x-1)\bar{p}(x)+\mu(x-1)\bar{q}(x) = (x-1)\big(\lambda\bar{p}(x)+\mu\bar{q}(x)\big)$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

donde $\bar{h}(x) = \lambda\bar{p}(x) + \mu\bar{q}(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a 2 por ser $\mathbb{R}_2[x]$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En consecuencia, V es subespacio vectorial de E.
Si $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, como todo polinomio $p(x) \in V$ se escribe $(x-1)\bar{p}(x)$ con $\bar{p}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se deduce que $\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2\}$ es una base de V y su dimensión es entonces 3.

b) El polinomio $x^2 - 3x + 2 \in V$ se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de la base $\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2\}$ de V:

$$2 - 3x + x^2 = \alpha(x-1) + \beta(x-1)x + \gamma(x-1)x^2 = -\alpha + (\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma)x^2 + \gamma x^3$$

Luego: $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$. De otro modo:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = -2(x-1) + (x-1)x = (-2, 1, 0)\,.$$

c) Expresando en coordenadas los vectores de la base de V, $\{(-1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}$ (recordemos que la base de E la tomamos en el orden $\{1, x, x^2, x^3\}$), para calcular un suplementario a V hemos de completar esta base hasta una base de $\mathbb{R}^4$.
Denotemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| \neq 0$, el vector $(0,0,0,1)$ (i.e. el polinomio x^3) es L.I. a los vectores de la base de V y por lo tanto $S = \langle(0,0,0,1)\rangle = \langle x^3\rangle$ es un suplementario a V.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO III.

2. Aplicaciones lineales

2.1. Ejemplos y tipos de aplicaciones lineales.

17. Estudia cuales de las siguientes aplicaciones son lineales:
   a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, \frac{1}{2}x - y)$.
   b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (-x+4y, x-2y, x^2+y^2)$.
   c) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2, 0, x_2+x_3)$.
   d) $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $T(a+bx+cx^2) = (-a+b, 2a+3b-\sqrt{2}c)$.
   e) $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$,
   $$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{21} + a_{22} + (2a_{11} - a_{21})x + (a_{12} + 3a_{22})x^2.$$
   f) $T\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $T(p(x)) = xp'(x)$.
   g) $\det\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\det(A) = ad - bc$ donde $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
   h) $tr : \mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \to k$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ donde $A = (a_{ij})$.

18. En $\mathbb{R}_3[x]$ sea la aplicación $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = (x-3)p'(x)$. Prueba que T es una aplicación lineal.

2.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

19. Sea $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:
   $$f(x,y,z) = (x-y+z, x+y-z)$$
   Probar que es una aplicación lineal y calcular bases y dimensión del núcleo y la imagen. ¿Es epiyectiva?

20. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:
   $$T(x,y,z) = (y-z, -x+4z, y+z)$$
   Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

21. Sea la aplicación $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por:
   $$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+2c+d, a+3b+5c-7d, a-b+c-d)\,.$$
   Prueba que T es lineal. Calcula su núcleo e imagen.

22. Sobre el espacio vectorial E de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación $T\colon E \to E$ definida por:
   $$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3b & 6a-4b \\ -a+\frac{9}{2}b+3c-2d & 6a-3b-d \end{pmatrix}$$
   Probar que T es lineal y calcular su núcleo y su imagen.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO III.

18. En $\mathbb{R}_3[x]$ sea la aplicación $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = (x-3)p'(x)$. Prueba que T es una aplicación lineal.

    SOLUCIÓN: Por definición, T es una aplicación lineal si verifica:

    $$T\big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big) = \lambda T\big(p(x)\big) + \mu T\big(q(x)\big) \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

    Si denotamos $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ ($\mathbb{R}_3[x]$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial) se tiene que $h'(x) = \lambda p'(x) + \mu q'(x)$ y por lo tanto:

    $$\begin{aligned} T\big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big) = T\big(h(x)\big) &\overset{def.\,T}{=} (x-3)h'(x) = (x-3)\big(\lambda p'(x) + \mu q'(x)\big) = \\ &= \lambda(x-3)p'(x) + \mu(x-3)q'(x) \overset{def.\,T}{=} \lambda T\big(p(x)\big) + \mu T\big(q(x)\big) \end{aligned}$$

20. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

    $$T(x,y,z) = (y-z, -x+4z, y+z)$$

    Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

    SOLUCIÓN: T es lineal si:

    $$T\big(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')\big) = \lambda T(x,y,z) + \mu T(x',y',z') \quad \forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

    Por definición de suma de vectores y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$ (es $\mathbb{R}$-espacio vectorial):

    $$\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

    Luego:

    $$\begin{aligned} T\big(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')\big) &= T(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \overset{def.\,T}{=} \\ &= \big((\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z'), -(\lambda x + \mu x') + 4(\lambda z + \mu z'), (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')\big) = \\ &= \big(\lambda(y-z) + \mu(y'-z'), \lambda(-x+4z) + \mu(-x'+4z'), \lambda(y+z) + \mu(y'+z')\big) = \\ &= \lambda(y-z, -x+4z, y+z) + \mu(y'-z', -x'+4z', y'+z') \overset{def.\,T}{=} \\ &= \lambda T(x,y,z) + \mu T(x',y',z'). \end{aligned}$$

    Para calcular el núcleo y la imagen de T calcularemos primero la matriz asociada a T en la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Por definición, las columnas de la matriz son las imágenes de los 3 vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Y como:

    $$T(1,0,0) = (0,-1,0)\,, T(0,1,0) = (1,0,1)\,, T(0,0,1) = (-1,4,1)\,,$$

    la matriz asociada a T en la base canónica es:

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    Se tiene que el rango de A es la dimensión de la Imagen de T, y como $|A| = 2 \neq 0$:

    $$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ T = \mathrm{rg}(A) = 3$$

    y una base de Im T está formada por los vectores $\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}$. Luego en particular T es epiyectiva. Por la fórmula de la dimensión:

    $$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker} T + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ T$$

    se sigue que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker} T = 0$ y por tanto $\mathrm{Ker} T = \{0\}$. En particular T es inyectiva y en consecuencia es un isomorfismo.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO IV.

2.3. Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambios de base.

23. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y-2z, y-z) \end{array}$$

en las bases $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

24. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
   a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
   b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
   c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

25. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_3,\ \ker T = < e_1 + e_2 >$$

Deducir la matriz de T y calcular $Im\, T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

26. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (0,1,0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,1,3)$.

27. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z & z-x \\ x+2y-z & 2x+y \end{pmatrix}$. Se pide:
   a) Calcula la matriz de T en las bases usuales.
   b) Sean las bases $C = \{(0,1,1),(1,0,1),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $C' = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(k)$. Calcula la matriz de T en estas bases.

28. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial E.
   a) Probar que los vectores $u_1' = 2u_1 - u_2 + u_3$, $u_2' = u_1 + u_3$, $u_3' = 3u_1 - u_2 + 3u_3$ forman una base de E.
   b) Calcular las coordenadas del vector $u = u_1 - 4u_3$ en la base de (a).
   c) Hallar las coordenadas respecto de la base inicial del vector $v = -2u_1' + 3u_2' + u_3'$.

29. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de T en la base $\{e_1', e_2', e_3'\}$ siendo:

$$e_1 = e_1',\ e_2 = \frac{1}{2}e_2',\ e_3 = e_3' + e_1' - \frac{1}{2}e_2'$$

30. Considera la aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2 \end{aligned}$$

   a) Demuestra que f es lineal.
   b) Da la matriz de f asociada a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.
   c) Da la matriz de f asociada a la base $B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\}$.
   d) Da las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO IV.

24. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
   a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
   b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
   c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

   Solución: Sea $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es aquella cuyas columnas son las imágenes de los vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$, y como:

$$f(e_1) = (2,0,0)\,, \quad f(e_2) = (1,0,0)\,, \quad f(e_3) = (0,-1,0)$$

   la matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calculemos una base de Ker$f$.

$$\text{Ker}f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = (0,0,0)\} \overset{def.\,f}{=} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (2x+y,-z,0) = (0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x+y = 0,\ z = 0\} = \{(x,-2x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-2,0) \rangle$$

   b) Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}\ f = \text{rg}(A) = 2$ y una base es:

$$\text{Im}\ f = \langle f(e_2), f(e_3) \rangle$$

   c) El vector $(6,-2,0)$ no pertence al núcleo pues $f(6,-2,0) = (10,0,0) \neq (0,0,0)$.

30. Considera la aplicación:

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$
$$p(x) \mapsto p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2$$

   a) Demuestra que f es lineal.
   b) Da la matriz de f asociada a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.
   c) Da la matriz de f asociada a la base $B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\}$.
   d) Da las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$.

   Solución:

   a) Demostraremos que es lineal por partes. Veamos primero que:

$$f\big(\lambda p(x)\big) = \lambda f\big(p(x)\big) \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

   En efecto:

$$f\big(\lambda p(x)\big) = \lambda p(-1) + \lambda p(1)(x-1) + \lambda p(0)(x-1)^2 =$$
$$= \lambda\big(p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2\big) = \lambda f\big(p(x)\big).$$

   Comprobemos ahora que:

$$f\big(p(x) + q(x)\big) = f\big(p(x)\big) + f\big(q(x)\big) \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$f\big(p(x) + q(x)\big) = p(-1) + q(-1) + \big(p(1) + q(1)\big)(x-1) + \big(p(0) + q(0)\big)(x-1)^2 =$$
$$= p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2 + q(-1) + q(1)(x-1) + q(0)(x-1)^2 =$$
$$= f\big(p(x)\big) + f\big(q(x)\big).$$

   Luego f es lineal.

   b) Las columnas de la matriz A asociada a f son las imágenes de $\{1, x, x^2\}$.

$$f(1) = 1 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 = 1 - x + x^2 \equiv (1,-1,1)$$
$$f(x) = -1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 = -2 + x \equiv (-2,1,0)$$
$$f(x^2) = 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 = x \equiv (0,1,0)$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\{1,x,x^2\}} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{\{1,x,x^2\}} \\ {\scriptstyle C}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle C^{-1}} \\ \mathbb{R}^3_{B'} & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^3_{B'} \end{array}$$

donde $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base nueva:

$$B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\} = \{(-1,0,0), (-1,1,0), (1,-2,1)\}$$

a la base antigua $\{1, x, x^2\}$. Su inversa vale $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz de f en la base B' es:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$ son:

$$f\big((2,1,1)_{B'}\big) = A' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO V.

3. Espacio dual. Subespacio incidente. Ecuaciones paramétricas e implícitas.

3.1. Ecuaciones paramétricas e implícitas.

31. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ generados por:
$$E_1 = \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,3,2)\rangle$$
Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

32. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:
$$E_1 = \langle (1,0,1,0),(1,2,3,0)\rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,1)\rangle$$
Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

3.2. Espacio dual. Subespacio incidente.

33. Comprueba que $\{\bar{e}_1 = (0,1,1), \bar{e}_2 = (1,0,0), \bar{e}_3 = (2,-1,0),\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula su base dual.

34. Sean las formas lineales de $\mathbb{R}^3$:
$$\bar{\omega}_1(x,y,z) = x+2y+3z, \quad \bar{\omega}_2(x,y,z) = x+6y+8z \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_3(x,y,z) = x+10y+14z.$$
Demuestra que $\{\bar{\omega}_i\}_{i=1}^3$ forma una base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Calcula las coordendas de la forma lineal $\omega(x,y,z) = 3x+4y+10z$ en dicha base.

35. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:
$$V = \langle (1,-1,2,1)\rangle\,, V' = \langle (1,-1,2,1),(2,0,-1,-1)\rangle \text{ y } V'' = \langle (1,-1,2,1),(2,0,-1,-1),(3,3,1,0)\rangle$$
Calcula una base de cada uno de los incidentes y analiza si la forma lineal $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4$, pertenece a alguno de esos incidentes.

36. Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual. Sea la aplicación lineal $T\colon E^* \to E$ definida por:
$$T(\omega_1) = e_1 - e_2, \quad T(\omega_2) = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad T(\omega_3) = 3e_2 + e_3.$$
Calcula bases de $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, $(\ker T)^\circ$ y $(\operatorname{Im} T)^\circ$.

37. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual.
   a) Dados los subespacios $V =< e_1 - e_2, 2e_1 - e_3 >$ y $V' =< 2e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 >$, calcula una base de $(V \cap V')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V \cap V'$.
   b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$ definidas por
   $$\bar{\omega}_1(e) = x+y+z, \quad \bar{\omega}_2(e) = y-2z, \quad \bar{\omega}_3(e) = x+y$$
   para cada vector $e = xe_1 + ye_2 + ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$.
   c) Calcula las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3$ en la base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ y el incidente del subespacio $< u >$ en función de $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO V.

32. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:

$$E_1 = \langle (1,0,1,0), (1,2,3,0) \rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle$$

Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

Solución:

- Ecuaciones de $E_1 = \langle (1,0,1,0), (1,2,3,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.
En primer lugar observemos que los vectores $u = (1,0,1,0), v = (1,2,3,0)$ no son proporcionales, luego forman base de E_1. Teniendo en cuenta que todo vector de E_1 se expresa de modo único como combinación lineal de u y v se tiene que un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ pertenece a E_1 si y sólo si $e = \lambda u + \mu v$ (donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Escribir esta relación en coordenadas es dar la ecuación paramétrico-vectorial de E_1:

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,0,1,0) + \mu(1,2,3,0)\,.$$

Las ecuaciones paramétricas de E_1 son por tanto:

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 2\mu \\ z &= \lambda + 3\mu \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Daremos ahora las ecuaciones implícitas de E_1 de dos formas, en primer lugar usando la teoría del rango. Recordemos que un vector e de $\mathbb{R}^4$ está en E_1 si $e = \lambda u + \mu v$, o equivalentemente, si e es combinación lineal de u y v, y por lo tanto (como u y v son base de E_1) si $\operatorname{rg}(e,u,v) = \operatorname{rg}(u,v) = 2$. En coordenadas:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Luego fijado un menor de orden 2 no nulo (que nos da la dimensión de E_1), por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, esta condición equivale a la anulación de dos menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que son las ecuaciones implícitas de E_1, y que simplificando resultan:

$$x + y - z = 0 \qquad t = 0\,.$$

Calculemos ahora utilizando el subespacio incidente a E_1. La dimensión de $\overset{\circ}{E_1}$ es 2 (la fórmula de la dimensión dice que $\dim_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{E_1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} E_1$), y se tiene:

$$\begin{aligned} E_1^\circ :&= \{\omega = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, \omega(u) = 0 \text{ y } \omega(v) = 0\} = \\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \,|\, \alpha + \gamma = 0,\ , \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0\} = \langle (1,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle \end{aligned}$$

Por reflexividad tenemos que $E_1 = \left(\overset{\circ}{E_1}\right)^\circ$, luego un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ yace en E_1 si y sólo si:

$$\theta_1(x,y,z,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \theta_2(x,y,z,t) = 0\,,$$

es decir, si y sólo si:

$$x + y - z = 0 \qquad \text{y} \qquad t = 0\,.$$

- Ecuaciones de $E_2 = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Es fácil comprobar que $\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 3$ y por lo tanto estos vectores forman base de E_2. Se tiene entonces que un vector cualquiera $e = (x,y,z,t)$ de E_2 es de la forma:

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(1,1,1,1)\,, \qquad \text{con } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,.$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

En consecuencia las ecuaciones paramétricas de E_2 son:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta + \gamma \\ y &= \alpha + \gamma \\ z &= \beta + \gamma \\ t &= \gamma \end{aligned}$$

Como $\dim_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{E}_2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 4-3 = 1$, entonces E_2 viene descrito por una ecuación implícita, que se deduce directamente de las ecuaciones paramétricas anteriores:

$$x - y - z + t = 0\,.$$

37. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual.
   a) Dados los subespacios $V =< e_1 - e_2, 2e_1 - e_3 >$ y $V' =< 2e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 >$, calcula una base de $(V \cap V')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V \cap V'$.
   b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ definidas por
   $$\bar{\omega}_1(e) = x + y + z, \quad \bar{\omega}_2(e) = y - 2z, \quad \bar{\omega}_3(e) = x + y$$
   para cada vector $e = xe_1 + ye_2 + ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.
   c) Calcula las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y el incidente del subespacio $< u >$ en función de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.

SOLUCIÓN:

a) Se tiene que $\{v_1 = (1,-1,0), v_2 = (2,0,-1)\}$ y $\{v'_1 = (0,2,1), v'_2 = (1,1,1)\}$ son bases de V y V' respectivamente (pues no son proporcionales). Dado que nos piden calcular también las ecuaciones paramétricas, calculemos una base de $V \cap V'$. Teniendo en cuenta que los vectores $\{v_1, v_2, v'_1\}$ forma base de $V + V'$ (pues $\det(v_1, v_2, v'_1) \neq 0$) y la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V + V') = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} V' - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap V')\,,$$

se deduce que $\dim_R(V \cap V') = 1$, y dado que $v'_2 - v'_1 = v_1$ se tiene que:

$$V \cap V' = \langle v_1 \rangle = \langle (1,-1,0) \rangle\,.$$

En consecuencia, todo vector $u = (x, y, z)$ de $V \cap V'$ se escribe como $u = \lambda v_1$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$) y las ecuaciones paramétricas de $V \cap V'$ son:

$$x = \lambda\,, \quad y = -\lambda\,, \quad z = 0\,.$$

Por otra parte tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V \cap V')^\circ = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap V') = 3 - 1 = 2\,,$$

luego dos será el número de ecuaciones implícitas que definen $V \cap V'$, y como de las ecuaciones (paramétricas) anteriores se deduce que:

$$x + y = 0\,, \quad z = 0$$

se concluye que estas son precisamente las ecuaciones implícitas de $V \cap V'$.
Por último, dadas las ecuaciones implícitas se sigue que $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de $(V \cap V')^\circ$.

b) Las coordenadas de la formas $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ son:

$$\bar{\omega}_1 = (1,1,1)\,, \quad \bar{\omega}_2 = (0,1,-2)\,, \quad \bar{\omega}_3 = (1,1,0)\,.$$

Como la dimensión del espacio dual E^* es 3 y $\det(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq 0$ se sigue que dichas formas lineales forma base de E^*.
Para calcular una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de E dual de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ observemos en primer lugar que ya tenemos la matriz de cambio de base de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ a $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$:

$$E^*_{\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}} \to E^*_{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}} \rightsquigarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

El morfismo $E^*_{\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}} \to E^*_{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$ induce un morfismo entre los espacios vectoriales duales (morfismo transpuesto) $E_{\{e_1,e_2,e_3\}} \to E_{\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}}$ (por reflexividad $E^{**} \simeq E$ y donde $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ es la base dual de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$ que buscamos) cuya matriz asociada es C^t.
Por definición de matriz asociada respecto de una pareja de bases, las columnas de la matriz C^t expresan los vectores e_i en función de los $\bar e_j$, que es justo lo contrario a lo que nos pide el ejercicio. Por lo tanto nos interesa conocer la matriz de $E_{\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}} \to E_{\{e_1,e_2,e_3\}}$, que precisamente es:

$$(C^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Se concluye entonces que:

$$\bar e_1 = (-2,2,1)\,, \quad \bar e_2 = (-1,1,0)\,, \quad \bar e_3 = (3,-2,-1)$$

es la base dual de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$.

c) Las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3 = (1,-1,1)$ en la base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ son:

$$\begin{array}{c} E_{\{e_1,e_2,e_3\}} \to E_{\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}} \\ u = (1,-1,1) \mapsto C^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{array}$$

Se tiene así que $u = \bar e_1 - 3\bar e_2$, luego:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\langle u \rangle} &= \{\bar\omega \in E^*_{\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}} \,|\, \bar\omega(u) = 0\} = \{\bar\omega = (\alpha,\beta,\gamma) \in E^*_{\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}} \,|\, \alpha - 3\beta = 0\} = \\ &= \langle (3,1,0),(0,0,1) \rangle = \langle 3\bar\omega_1 + \bar\omega_2, \bar\omega_3 \rangle\,. \end{aligned}$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO VI.

4. Geometría Afín.

38. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^3$ cuyo vector de posición es $(2,1,-2)$ y cuyo subespacio director viene definido por la ecuación $3x-2y+z=0$.
39. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ cuyo vector de posición es $(1,1,1,0)$ y cuyo subespacio director está generado por los vectores $(1,1,1,1),(0,1,0,-1)$.
40. Dados los planos definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\pi_1\colon x+z=1$$

$$\pi_2\colon x+y+z=1$$

   a) Demostrar que se cortan en una recta y calcular las ecuaciones paramétricas de la intersección.
   b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P=(1,0,1)$ y la intersección $\pi_1\cap\pi_2$.
41. Hallar las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $x+y+z=4$, es paralela al plano $x-y+z=0$ y pasa por el punto $(2,1,1)$.
42. Calcular las ecuaciones implícitas de las subvariedad afín de R^4 que pasa por el punto $(1,0,2,3)$ y cuyo subespacio director es la imagen de la aplicación lineal:

$$T\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$$

$$(x,y,z,t)\mapsto(x+z-t,-x+y+t,-y-z,z)$$

43. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\pi_1\colon ax+2y+6z=0\,,\quad \pi_2\colon 2x+ay+4z=2\,,\quad \pi_3\colon 2x+ay+6z=a-2\,.$$

44. Hállese la ecuación de la mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que contiene a las rectas:

$$r_1\equiv\begin{cases}2x-y=0\\ x+z=0\\ 3z-t=0\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x+y-3=0\\ 2x-z+1=0\\ t=0\end{cases}$$

45. Sean r_1, r_2 y r_3 las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$r_1\equiv\begin{cases}x+y+x=0\\ x+2y=0\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}2x+2y+z=0\\ x+y=2\end{cases}\qquad r_3\equiv\begin{cases}2x+3y+z=2\\ y-z=0\end{cases}$$

   a) Demostrar que r_1 y r_3 son paralelas y que r_2 se cruza con ambas.
   b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implíticas de un plano paralelo a las tres rectas.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO VI.

44. Hállese la ecuación de la mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que contiene a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Dadas las ecuaciones implícitas se tiene:

$$r_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - y = 0\,,\ x + z = 0\,,\ 3z + t = 0\} = \{(x,y,z,t) \,|\, y = 2x\,,\ z = -x\,,\ t = -3x\} =$$
$$= \{(x, 2x, -x, -3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (0,0,0,0) + \langle (1,2,-1,-3) \rangle = e_0 + \langle v_1 \rangle\,.$$

Análogamente:

$$r_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - 3 = 0\,,\ 2x - z + 1 = 0\,,\ t = 0\} = \{(x,y,z,t) \,|\, y = 3 - x\,,\ z = 1 + 2x\,,\ t = 0\} =$$
$$= \{(x, 3 - x, 1 + 2x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (0,3,1,0) + \langle (1,-1,2,0) \rangle = e_0' + \langle v_2 \rangle\,.$$

Por definición, la mínima subvariedad afín que contiene a r_1 y r_2 es la subvariedad afín suma:

$$r_1 + r_2 = e_0 + \langle e_0 - e_0', v_1, v_2 \rangle = (0,0,0,0) + \langle (0,-3,-1,0), (1,2,-1,-3), (1,-1,2,0) \rangle$$

(luego es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, pues pasa por el origen) y su dimensión es $\mathrm{rg}(e_0 - e_0', v_1, v_2) = 3$ (es un hiperplano en $\mathbb{R}^4$). Se tiene entonces que un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vive en $r_1 + r_2$ si y sólo si $e = \lambda(e_0 - e_0') + \mu v_1 + \eta v_2$ (con $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$), y por lo tanto sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= \mu + \eta \\ y &= -3\lambda + 2\mu - \eta \\ z &= -\lambda - \mu + 2\eta \\ t &= -3\mu \end{aligned}$$

Por al fórmula de la dimensión:

$$\dim_R (r_1 + r_2)^\circ = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} (r_1 + r_2) = 4 - 3 = 1$$

se tiene que $r_1 + r_2$ viene definida por una ecuación implícita, que deduciremos calculando el incidente a $r_1 + r_2$.

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)^\circ &= \{w = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, w(e_0 - e_0') = 0\,,\ w(v_1) = 0\,,\ w(v_2) = 0\} = \\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, -3\beta - \gamma = 0\,,\ \alpha + 2\beta - \gamma - 3\delta = 0\,,\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0\} = \\ &= \{(7\beta, \beta, -3\beta, 4\beta) \,|\, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (7, 1 - 3, 4) \rangle \end{aligned}$$

Luego la ecuación implícita de $r_1 + r_2$ es $7x + y - 3z + 4t = 0$.

45. Sean r_1, r_2 y r_3 las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad r_3 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

a) Demostrar que r_1 y r_3 son paralelas y que r_2 se cruza con ambas.
b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implíticas de un plano paralelo a las tres rectas.

SOLUCIÓN: Antes de contestar, calculemos los vectores de posición y los subespacios directores de las rectas. Procediendo de modo similar al ejercicio anterior se tiene:

$$r_1 = \langle (-2,1,1) \rangle\,, \qquad r_2 = (2,0,-4) + \langle (-1,1,0) \rangle\,, \qquad r_1 = (1,0,0) + \langle (-2,1,1) \rangle.$$

y sus ecuaciones paramétricas son:

$$r_1 = \{x = -2\lambda,\ y = \lambda, z = \lambda\}\,,\ r_2 = \{x = 2 - \alpha,\ y = \alpha,\ z = -4\}\,,\ r_3 = \{x = 1 - 2\beta,\ y = \beta,\ z = \beta\}\,,$$

con $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

a) Dado que los subespacios directores de r_1 y r_3 son el mismo y una pasa por el origen, mientras que la otra no, se deduce que r_1 y r_3 son paralelas.
Para comprobar que r_2 y r_1 se cruzan observemos que como sus subespacios directores no son proporcionales las dos rectas no son paralelas, luego basta ver que no se cortan. En efecto, si se cortaran existirían un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaciendo las ecuaciones paramétricas de ambas rectas, pero como el sistema:

$$-2\lambda = 2 - \alpha\,, \quad \lambda = \alpha\,, \quad \lambda = -4$$

no tiene solución, r_1 y r_2 no se cortan (y tampoco son paralelas), luego se cruzan.
Con el mismo razonamiento se sigue que el sistema:

$$2 - \alpha = 1 - 2\beta\,, \quad \alpha = \beta\,, \quad -4 = \beta$$

no tiene solución, luego r_2 y r_3 no se cortan, y como sus subespacios directores no están contenidos el uno en el otro, tampoco son paralelas. Así pues r_2 y r_3 también se cruzan.

b) Por definición de paralelismo, el subespacio director V_π de un plano π paralelo a las tres rectas tendrá que contener a los tres subespacios directores de las rectas, y como el de r_1 y r_3 son el mismo se tiene:

$$V_\pi = \langle (-2, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle\,.$$

Para que π que no contenga a ninguna de las rectas basta con encontrar un punto P que no pase por ninguna de ellas, por ejemplo $P = (0, 1, 0)$. Es decir;

$$\pi = P + V_\pi = (0, 1, 0) + \langle (-2, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle\,.$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = -2\lambda - \mu\,, \quad y = 1 + \lambda + \mu\,, \quad z = \lambda\,.$$

Y una ecuación implícita de π es $x + y + z = 1$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

Ejercicios tipo test de las lecciones 1 y 2.

1. El vector $e = (-1, 0, \lambda)$ está en el plano generado por los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (1, 3, 0)$

(a) Si $\lambda = -3$
(b) Para cualquier valor de λ
(c) En ningún caso.

2. Sea E' el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E' = \langle (2, 1, 0), (1, 0, -2) \rangle$
(b) $E' = \langle (2, 1, 0), (1, 1, 2) \rangle$
(c) $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + 3z = 0\}$
(d) $E' = \{(2\lambda + \mu, \lambda, -2\mu) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

3. Los valores de α y β para los que el vector $(\alpha, 1, 5, \beta) \in \mathbb{R}^4$ pertenece al subespacio generado por los vectores $(1, 0, 2, 1)$ y $(2, 1, -1, 0)$ son:

(a) $\alpha = \beta = 5$
(b) $\alpha = 5$, $\beta = 3$
(c) $\alpha = 3$, $\beta = 5$

4. Dados los vectores $u = (2, 1, 1)$ y $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) Un suplementario de $\langle u, v \rangle$ es el subespacio $\langle (1, 0, 0) \rangle$.
(b) Los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, u y v forman una base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Un suplementario de $\langle u, v \rangle$ es el subespacio $\langle (0, 0, 1) \rangle$.

5. Dadas las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) Son linealmente independientes.
(b) Generan un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 3.
(c) Forman una base de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

6. Los valores de λ y μ para los que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \mu \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ no son linealmente independientes son:

(a) $\lambda = 2$, $\mu = 3$
(b) $\lambda = 4$, $\mu = 6$
(c) $\lambda = \mu = 3$

7. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - 3b & a + b \\ a + b & 3b - 2a \end{pmatrix} \text{ , con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 4.
(b) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 2.
(c) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 3.

8. Sea V el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 que son divisibles por $x-1$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) V no tiene estructura lineal.
(b) V es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ de dimensión 2.
(c) V es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ de dimensión 3.

9. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sean E_1, E_2 subespacios de E de dimensiones n_1 y n_2 respectivamente. Es **cierto** que:

(a) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
(b) Si $n = n_1 + n_2$, entonces $E = E_1 \oplus E_2$
(c) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $n = n_1 + n_2$
(d) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $n \leq n_1 + n_2$

10. Sea $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea $E' = \{p(x) \in E : p(1) = p(2)\}$. Solamente una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) E' no es un subespacio vectorial de E.
(b) $E' = \langle 1, x^2 - 3x \rangle$
(c) E' es un subespacio vectorial de E de dimensión 1.
(d) E' es un subespacio de dimensión 2 de E y está generado por los polinomios $\{1, 2x\}$.

11. En $\mathbb{R}^3$ considérense el subespacio $E' = \langle (1,2,-1), (1,3,2) \rangle$ y el vector $e = (a+2b, b, a)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) $e \in E'$ si y sólo si $a = 11$ y $b = -8$
(b) $e \in E'$ para todos los valores reales de a y b tales que $8a + 11b = 0$.
(c) $e \in E'$ si $a = 8$ y $b = -11$
(d) $e \in E'$ cualesquiera que sean los valores reales de a y b.

12. Dados los vectores $u = (3, 0, -1, 2)$, $v = (1, 1, 1, -2)$ y $w = (0, 1, 0, 3)$, cuyas coordenadas están referidas a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

(a) Los vectores $\{u, e_2, e_3, e_4\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) El subespacio $\langle u, v \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_3, e_4 \rangle$.
(c) El subespacio $\langle u, v, w \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_4 \rangle$.
(d) El subespacio $\langle e_1, e_2 \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle u, v \rangle$.

13. Sea $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) : \ b = c \right\}$. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es **cierta**:

(a) E es un espacio vectorial de dimensión 2. ;
(b) E no tiene estructura lineal.
(c) E es un espacio vectorial de dimensión 3. ;
(d) E es un espacio vectorial de dimensión 4.

14. Dados los vectores $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es **cierta**:

(a) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base las coordenadas del vector $v = (3, -2, -2)$ son $v = (1, 1, -2)$.
(b) No forman base.
(c) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base las coordenadas del vector $v = (3, -2, -2)$ son $v = (1, -1, -2)$.

15. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0,\ x + 2y + z = 0\}$; $E_2 = \langle (2, -1, 1), (0, 1, -1)\rangle$
Es **cierto** que:

(a) $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$;
(b) $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$
(c) $E_1 \cap E_2 = \langle (1, -1, 1)\rangle$
(d) E_1 y E_2 son subespacios suplementarios.

16. Dadas las matrices $A,\ B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, si $\det B \neq 0$ el determinante de la matriz $B^{-1} \cdot A \cdot B$ es igual a:

(a) $\det A$
(b) $\dfrac{1}{\det A}$
(c) $\det A \cdot \det B$

17. Las coordenadas del vector $e = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ respecto de la base $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ son:

(a) $(0, 1, 2)$
(b) $(0, 2, 1)$
(c) $(1, 0, 2)$

18. La expresión de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto de la base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ es:

(a) $2A_1 + 3A_2 - A_3 + A_4$
(b) $2A_1 - A_2 + 3A_3 + A_4$
(c) Las matrices A_1, A_2, A_3, A_4 no forman base.

19. En la base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 2)\}$ las coordenadas del vector e son $(1, 2, 3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\{(0, 0, 1), (0, -1, 0), (1, 1, 0)\}$?

(a) $(-9, 4, 2)$
(b) $(9, -4, -2)$
(c) $(9, -4, 2)$

20. Considérense los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \langle (1, 0, 1)\rangle \quad , \quad E_2 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.
(b) Un suplementario de E_2 es el subespacio generado por el vector $(1, 0, 0)$.
(c) E_1 y E_2 no son subespacios suplementarios.
(d) E_1 es una recta que corta al plano E_2 en el origen.

21. Considérense los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \langle (1, -1, 0, 1)\rangle \quad , \quad E_2 = \langle (-1, -1, 1, 1), (3, -1, -1, 1)\rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$
(b) $E_1 + E_2 = E_2$
(c) $E_1 \subset E_2$
(d) Una base de $E_1 + E_2$ es la formada por los vectores $(1, -1, 0, 1)$ y $(3, -1, -1, 1)$.

22. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^t = I$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) A es invertible.
(b) $\det A = \pm 1$.
(c) $A^{-1} = A^t$
(d) A no es invertible.

23. Sea S el subconjunto de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas ($A = A^t$). Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) S es un espacio vectorial de dimensión 2 y una base de S es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) S es un espacio vectorial de dimensión 3 y una base de S es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) S es un espacio vectorial de dimensión 3 y una base de S es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) S no es un espacio vectorial.

24. En el espacio vectorial $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, considérese el subespacio vectorial V generado por las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) $\dim V = 1$; **b)** $A \notin V$
(b) $A \in V$ y sus coordenadas respecto de la base $\{A_1, A_2\}$ de V son $(4, 4)$.
(c) $A = 2A_1 + 2A_2$, es decir, $A \in V$ y sus coordenadas en la base $\{A_1, A_2\}$ de V son $(2, 2)$.

25. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, para $n > 1$ se verifica:

(a) $A^n = 2^n A$
(b) $A^n = 2^{n-1} A$
(c) $A^n = (-2)^n A$
(d) $A^n = (-2)^{n-1} A$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) A es simétrica y B es hemisimétrica.
(b) A es simétrica pero B no es hemisimétrica.
(c) A es simétrica y $A - A^t$ es hemisimétrica.
(d) B no es hemisimétrica y $B + B^t$ es simétrica.

27. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) A es invertible para $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
(b) A no tiene inversa, independientemente del valor que tome λ.
(c) A es invertible si $\lambda \neq 0$.

28. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, su potencia n-ésima es:

(a) $A^n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}$

(b) No se puede calcular.

(c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

(d) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

29. Dada la ecuación matricial $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) No tiene solución.

(b) Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Tiene infinitas soluciones.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

Soluciones de los ejercicios tipo test de las lecciones 1 y 2

1. *(a)* ; **2.** *(c)* ; **3.** *(b)* ; **4.** *(c)* ; **5.** *(b)* ; **6.** *(b)* ; **7.** *(b)* ; **8.** *(c)* ; **9.** *(d)* ; **10.** *(b)*

11. *(b)* ; **12.** *(d)* ; **13.** *(c)* ; **14.** *(a)* ; **15.** *(c)* ; **16.** *(a)* ; **17.** *(a)* ; **18.** *(b)* ; **19.** *(b)* ; **20.** *(c)*

21. *(a)* ; **22.** *(d)* ; **23.** *(c)* ; **24.** *(d)* ; **25.** *(b)* ; **26.** *(a)* ; **27.** *(b)* ; **28.** *(d)* ; **29.** *(b)*

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

Aplicaciones lineales. Matrices. Sistemas lineales. Cambios de base

1. La matriz asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y, z + y, x - z)$$

respecto de la base usual en $\mathbb{R}^3$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) f es inyectiva. ; **b)** f es epiyectiva. ; **c)** f no es inyectiva y la dimensión de $\ker f$ es 1.

3. Sea λ un parámetro real y considérese el endomorfismo

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, \lambda x + y - z, 2x + 2y - z)$$

T es un isomorfismo sólo si:

a) $\lambda = 3$; **b)** $\lambda \neq 3$; **c)** Para cualquier valor de λ.

4. Sea la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (y - z, -x + 4z, y - z)$$

Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) $\dim \operatorname{Im} T = 2$, $\dim \ker T = 1$

b) $\operatorname{Im} T = \langle (0, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$, $\ker T = \langle (1, 1, 1) \rangle$

c) $\operatorname{Im} T = \langle (-1, 4, -1), (1, 0, 1) \rangle$, $\ker T = \langle (4, 1, 1) \rangle$

5. Sea $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ el espacio de los polinomios de grado menor que 4 y considérese la aplicación lineal derivada:

$$D : E \to E$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) D es un isomorfismo. ; **b)** $\operatorname{Im} D = \langle 1, x, x^2 \rangle$, $\ker D = \langle 1 \rangle$.

c) $\operatorname{Im} D \cap \ker D = \{0\}$; **d)** $E = \operatorname{Im} D + \ker D$

6. Dadas las matrices A, $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, si $\det B \neq 0$ el determinante de la matriz $B^{-1} \cdot A \cdot B$ es igual a:

a) $\det A$; **b)** $\dfrac{1}{\det A}$; **c)** $\det A \cdot \det B$

7. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal de matriz asociada en la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $T(e_1+e_2)=3e_1+e_3$; **b)** $\ker T=0$
c) $\operatorname{Im}T=\langle(1,1,1),(2,-1,0)\rangle$; **d)** T es un isomorfismo.

8. Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(e_1)=e_2+e_3\,,\quad \ker T=\langle e_1-e_2\rangle\,,\quad T(e_3)=e_1$$

La matriz de T respecto de la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ es:
a) $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

9. En la base $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,0,2)\}$ las coordenadas del vector e son $(1,2,3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\{(0,0,1),(0,-1,0),(1,1,0)\}$?
a) $(-9,4,2)$; **b)** $(9,-4,-2)$; **c)** $(9,-4,2)$

10. Si $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$ es la matriz de $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ en la base $\{e_1,e_2,e_3\}$, la matriz de T en la base
$\bar e_1=e_1-e_2$, $\bar e_2=e_1+e_2+e_3$, $\bar e_3=e_2-2e_1$ es:
a) $\bar A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$
b) $\bar A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
c) $\bar A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$

11. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(1,3)=(-5,6)$ y $f(2,-1)=(1,3)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La matriz de f respecto de las bases $\{u_1=(1,3),u_2=(2,-1)\}$ y $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}-5&1\\6&3\end{pmatrix}$
b) La matriz de f respecto de las bases $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ y $\{v_1=(-5,6),v_2=(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
c) La matriz de f respecto de la base $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{pmatrix}-5&1\\6&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

d) La matriz de f respecto de las bases $\{u_1=(1,3),u_2=(2,-1)\}$ y $\{v_1=(-5,6),v_2=(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

12. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea T el endomorfismo de E definido por:

$$T(a+bx+cx^2)=a-b+(2b-c)x+(a+b-c)x^2$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de T respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) La matriz de T respecto de la base $\{1, x^2, x\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La matriz de T respecto de la base $\{1, x^2, x\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La matriz de T respecto de la base $\{x^2, x, 1\}$ de E es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = \bar{x} \\ x \qquad + z = \bar{y} \\ \qquad\quad - z = \bar{z} \end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de T es invertible.
b) T deja invariante la recta $\langle (1, -1, 0) \rangle$.
c) La restricción de T al subespacio $\langle (1, -1, 0) \rangle$ es una homotecia de razón -1.
d) $\ker T = \langle (1, -1, 0) \rangle$.

14. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^t = I$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) A es invertible. ; **b)** $\det A = \pm 1$. ; **c)** $A^{-1} = A^t$; **d)** A no es invertible.

15. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea

$$D \colon E \to E$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

el operador derivada. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de D respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\ker D = \langle 1 \rangle$, $\operatorname{Im} D = \langle 1, x \rangle$.
c) $\ker D^2 = \langle 1, x \rangle$, $\operatorname{Im} D^2 = \langle 1 \rangle$.

d) La matriz de D respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, para $n > 1$ se verifica:
a) $A^n = 2^n A$; **b)** $A^n = 2^{n-1} A$; **c)** $A^n = (-2)^n A$; **d)** $A^n = (-2)^{n-1} A$

17. Dada la ecuación matricial $AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) No tiene solución.
b) Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
d) Tiene infinitas soluciones.

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) A es simétrica y B es hemisimétrica. **b)** A es simétrica pero B no es hemisimétrica.
c) A es simétrica y $A - A^t$ es hemisimétrica. **d)** B no es hemisimétrica y $B + B^t$ es simétrica.

19. Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a^2 \\ x + y + az = a^3 \end{array}\right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Si $a = 0$ sólo tiene la solución trivial.
b) Si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ el sistema es compatible determinado.
c) Si $a = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
d) Si $a = -2$ el sistema es compatible e indeterminado con grado de indeterminación 2.

20. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, su potencia n-ésima es:
a) $A^n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}$; **b)** No se puede calcular.
c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$; **d)** $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

21. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) A es invertible para $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
b) A no tiene inversa, independientemente del valor que tome λ.
c) A es invertible si $\lambda \neq 0$.

22. Dada la ecuación matricial $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) No tiene solución. **b)** Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **d)** Tiene infinitas soluciones.

23. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y - \lambda z = -\lambda \\ x + y + z = 1 \\ -3x + (\lambda + 1)y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Para $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, -4\}$ el sistema tiene solución única.
b) Si $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Si $\lambda = -4$ el sistema no tiene solución.
d) Si $\lambda = 4$ la única solución del sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

Soluciones de los ejercicios tipo test de las lecciones 3 y 4

1. *(a)* ; **2.** *(c)* ; **3.** *(b)* ; **4.** *(b)* ; **5.** *(b)* ; **6.** *(a)* ;
7. *(c)* ; **8.** *(d)* ; **9.** *(b)* ; **10.** *(b)* ; **11.** *(b)*; **12.** *(b)* ;
13. *(d)* ; **14.** *(d)* ; **15.** *(d)* ; **16.** *(b)* ; **17.** *(c)* ; **18.** *(a)* ;
19. *(d)* ; **20.** *(d)* ; **21.** *(b)* ; **22.** *(b)* ; **23.** *(d)* ;

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. 1^0 FÍSICAS

El espacio dual. Geometría afín.

1. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $\{e_1, e_2\}$ una base de E con base dual $\{\omega_1, \omega_2\}$.
La base dual $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\}$ de la base $\{\bar{e}_1 = e_1 - e_2, \bar{e}_2 = e_1 + e_2\}$ de E es:
a) $\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_2\,,\ \bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2\}$
b) $\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2\,,\ \bar{\omega}_2 = \omega_1 - \omega_2\}$
c) $\{\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2\,,\ \bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2\}$

2. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Los vectores $\bar{e}_1 = 2e_1 + e_3$, $\bar{e}_2 = e_2 - e_1$, $\bar{e}_3 = e_1 + e_3$ forman una base de E cuya base dual es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3\,,\ \bar{\omega}_2 = \omega_2\,,\ \bar{\omega}_3 = -\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3\}$$

b) Las formas lineales $\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2$, $\bar{\omega}_2 = \omega_3$, $\bar{\omega}_3 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ forman una base de E^*, que es la base dual de la base

$$\{\bar{e}_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2\,,\ \bar{e}_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3\,,\ \bar{e}_3 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2\}$$

c) Las formas lineales $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3 \in E^*$ de coordenadas respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de E^*: $\bar{\omega}_1 = (0,1,0)$,$\bar{\omega}_2 = (-1,0,0)$, $\bar{\omega}_3 = (1,0,1)$ forman una base de E^*, la base dual de

$$\{\bar{e}_1 = (0,1,0)\,,\ \bar{e}_2 = (-1,0,1)\,,\ \bar{e}_3 = (0,1,1)\}$$

d) Los vectores de coordenadas $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,-1,1)$, $\bar{e}_3 = (1,1,0)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, forman una base de E cuya base dual es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3\,,\ \bar{\omega}_2 = \omega_2\,,\ \bar{\omega}_3 = \omega_2 + \omega_3\}$$

3. Sea $E = \langle 1, x, x^2\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 y sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de $\{1, x, x^2\}$. Considérese la base de E determinada por los polinomios $2 + x^2$, $x - 1$, $1 + x^2$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La base dual de la base $\{2 + x^2\,,\ x - 1\,,\ 1 + x^2\}$ es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3\,,\ \bar{\omega}_2 = \omega_2\,,\ \bar{\omega}_3 = -\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3\}$$

b) Las coordenadas de la forma lineal $\omega = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ en la base dual de $\{2+x^2\,,\ x-1\,,\ 1+x^2\}$ son $\omega = (3, -2, 2)$.
c) Si $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ es la base dual de $\{2 + x^2\,,\ x - 1\,,\ 1 + x^2\}$, las coordenadas de la forma lineal $\omega = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ son $\omega = (1, 2, 3)$.

4. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y sea $T : E \to E$ la aplicación lineal definida por:

$$T(e_1) = e_1 - e_3\,, \quad 2e_1 + e_2 \in \ker T\,, \quad T(e_3) = e_1 + e_2$$

La matriz del morfismo traspuesto $T^* : E^* \to E^*$ respecto de la base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

5. En $\mathbb{R}^3$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) Unas ecuaciones implícitas de la recta $r = \langle (1,-1,1) \rangle$ son. $r \equiv \begin{cases} x+y &= 0 \\ x-z &= 0 \end{cases}$.

b) La ecuación implícita del plano $\pi = \langle (1,0,2),(0,1,1) \rangle$ es $\pi \equiv 2x - y - z = 0$.

a) Unas ecuaciones implícitas de la recta $r = \langle (1,-1,1) \rangle$ son. $r \equiv \begin{cases} x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$.

6. En $\mathbb{R}^3$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) El subespacio incidente del plano $\pi \equiv x - y + z = 0$ es $\pi^\circ \equiv \langle (1,-1,1) \rangle$.

b) El subespacio incidente con la recta $r = \langle (2,1,-1) \rangle$ es $r^\circ = \langle (1,2,0),(1,0,2) \rangle$.

c) El subespacio incidente con la recta $r \equiv \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$ es $r^\circ = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$.

d) El subespacio incidente con la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = -z$ es $r^\circ = \langle (1,0,2),(1,-2,0) \rangle$.

7. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y E_1 , E_2 subespacios vectoriales de E. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) ${E_1}^{\circ\circ} = E_1$, **b)** $(E_1 + E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$, **c)** $(E_1 \cap E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$, **d)** $(E_1 + E_2)^\circ = E_1^\circ \cap E_2^\circ$

8. Sean E_1 y E_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \langle (1,0,2),(0,-1,1) \rangle \quad ; \quad E_2 = \langle (-1,1,0),(1,1,1) \rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**

a) $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$; **b)** $E_1^\circ = \langle (-2,1,1) \rangle$, $E_2^\circ = \langle (1,1,-2) \rangle$

c) $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, $E_1 \cap E_2 = \langle (1,1,1) \rangle$; **d)** $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$

9. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,-1,2,1)$, $U_3 = (1,1,-1,-1)$.

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) Su subespacio incidente es $E_1^\circ = \langle (-1,1,1,-1) \rangle$

b) Su ecuación implícita es $E_1 \equiv x - y - z + t = 0$

c) Su subespacio incidente es $E_1^\circ = \langle (1,-2,-1,0),(0,1,0,1) \rangle$

d) Sus ecuaciones implícitas son $E_1 \equiv \begin{cases} x - 2y - z + t &= 0 \\ y + t &= 0 \end{cases}$

10. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - y + t &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \end{cases}$

Es **falso** que:

a) $E_1^\circ = \langle (1,-1,0,1),(2,1,1,0),(1,-1,-1,-1) \rangle$

b) $E_1^\circ = \langle (1,-1,0,1),(2,1,1,0),(3,0,0,-1) \rangle$

c) E_1 es el subespacio generado por el vector $e = (1,4,-6,3)$

d) $E_1^\circ = \langle (1,-1,0,1),(2,1,1,0),(1,2,1,-1) \rangle$

11. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales E_1 y E_2 generados, respectivamente, por los vectores $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ y $\{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$.

Es **cierto** que:

a) Las ecuaciones implícitas de E_1 son $\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x - y + z - t &= 0 \end{cases}$

b) El subespacio incidente con E_2 está generado por la forma lineal $\omega = (1,-1,-1,0)$.

c) Los subespacios incidentes de E_1 y E_2 son respectivamente:

$$E_1^\circ = \langle (1,0,-1,0),(0,1,0,-1) \rangle \quad ; \quad E_2^\circ = \langle (0,1,1,-1) \rangle$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

d) La ecuación implícita de $E_1 + E_2$ es $y - t = 0$.

12. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \langle (2,1,1), (1,1,1) \rangle \quad ; \quad E_2 \equiv x - y + z = 0$$

Es **cierto** que:

a) $E_1 \cap E_2 = \langle (0,1,-1) \rangle$ **b)** E_1 y E_2 son planos paralelos.

c) E_1 y E_2 se cortan en la recta de ecuaciones implícitas $E_1 \cap E_2 \equiv \begin{cases} y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

13. Sea r la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P = (1,2,3)$ y cuyo subespacio director está generado por el vector $e = (-1,1,1)$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

b) Unas ecuaciones implícitas de r son $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \end{cases}$

c) Todo punto $(x,y,z) \in r$ satisface las ecuaciones $\dfrac{x-1}{-1} = y - 2 = z - 3$

d) Unas ecuaciones implícitas de r son $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

14. Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P = (0,1,-3)$ y cuyo subespacio director está generado por los vectores $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (0,-1,1)$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) Unas ecuaciones paramétricas de π son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = -3 - \mu \end{cases}$

b) La ecuación implícita de π es $\pi \equiv x - y - z = 2$.

c) π es el plano paralelo al plano de ecuación $x - y - z = 0$ que pasa por el punto $A = (3,1,0)$.

d) π es el plano paralelo al plano de ecuación $x - y - z = 0$ que pasa por el punto $A = (1,0,1)$.

15. Sea π' el plano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $P = (0,1,2,3)$ y que es paralelo al plano $\pi = (1,2,0,1) + \langle (0,1,1,-1), (-1,0,1,0) \rangle$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) El subespacio director de π' está generado por los vectores $u_1 = (0,1,1,-1)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$.

b) Las ecuaciones paramétricas de π' son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - \lambda - \mu \\ t = 3 + \lambda \end{array}\right\}$$

c) El plano π' es paralelo al plano de ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$

d) Unas ecuaciones implícitas de π' son $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + t = 4 \end{cases}$

16. Sean r y π una recta y un plano de $\mathbb{R}^4$ que pasan por el origen. Es **falso** que:

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view
a) La recta r es paralela al plano π precisamente si la dirección de r coincide con una de als direcciones del plano π.
b) La recta r es paralela al plano π si y sólo si el subespacio director del plano π contiene al subespacio director de la recta r.
c) Sea $\{\omega, \omega'\}$ es una base del subespacio incidente de π, $\pi^\circ = \langle \omega, \omega' \rangle$ y $r = \langle e \rangle$. La condición necesaria y suficiente para que r y π sean paralelos es que se verifique:

$$\omega(e) = \omega'(e) = 0$$

d) El plano π es paralelo a la recta r si el subespacio incidente de π contiene al subespacio incidente de r.

17. Sean r y s las rectas de $\mathbb{R}^4$ definidas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{z}{2} = \frac{t-1}{2} \quad ; \quad s = (-1, 3, 0, 1) + \langle (3, 1, 2, 1) \rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Las rectas r y s no son paralelas.
b) La recta r es paralela al plano $\pi \equiv \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$
c) La recta s es paralela al plano π' de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -2 + 2\mu \\ t = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$$

d) La recta s es paralela al plano $\pi \equiv \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

18. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$, $\pi' \equiv 2x - y + 2z = 2$ y los puntos $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 3, 1)$. L aecuación del plano π'' que pasa por la intersección de los planos π y π' y por el punto medio del segmento AB es:
a) $\pi'' \equiv x - y + z = 1$; **b)** $\pi'' \equiv 2x + 2y - 3z = 2$
c) $\pi'' \equiv 2x - 3y + 2z = 2$; **d)** $\pi'' \equiv x + 2y + z = 1$

19. Dada la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$, está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ y es paralela al plano $2x - y = 3$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $r \equiv \begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$; **b)** $r \equiv x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-3}$
c) $r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$; **d)** $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$

20. La ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = y = z - 2$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ es:
a) $x - y + z = 2$; **b)** $x = y$; **c)** $x - y = 2$; **d)** $x - y - z = 2$

21. Las ecuaciones de la recta r coplanaria con la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = y = z - 3$, que pasa por el origen y es paralela al plano $x + 2y + z = 1$ son:
a) $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - 5y - z = 0 \end{cases}$; **b)** $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

c) $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{-11}$; **d)** $r \equiv \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 4x+3y &= 0 \end{cases}$

22. Las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P = (1,2,1)$ y se apoya en las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y-1 = \dfrac{z-1}{3}$ y $r' \equiv \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases}$ son:

a) $s \equiv \begin{cases} 2x+y+3z &= 7 \\ x+y-z &= 0 \end{cases}$; **b)** $s \equiv \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 3x-2z &= 0 \end{cases}$

c) $s \equiv \begin{cases} 3x-2z &= 1 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$; **d)** $s \equiv \begin{cases} x+2y-2z &= 0 \\ 3x-2z &= 1 \end{cases}$

23. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+2z &= 1 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}$ está contenida en el plano $\pi \equiv 3x-2y+z = 1$

b) La recta $r \equiv \begin{cases} x-y-3z &= 1 \\ 2x-2z &= 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+z = 2$ son paralelos.

c) Las rectas $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 4x-3z+3 &= 0 \\ 4x+y-3z &= -1 \end{cases}$ son coplanarias.

d) La intersección del plano $\pi \equiv 2x-3y+z = 0$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z &= -1 \\ y-3z &= -2 \end{cases}$ es el punto $P = (1,1,1)$.

24. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y &= 2 \\ 2x-y-z &= 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1-3\lambda \\ z &= 2+2\lambda \end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La mínima subvariedad afín que contiene a r y a s es $\mathbb{R}^3$.

b) La recta r está contenida en el plano $5x-2y-3z = 7$ y la recta s está contenida en el plano $5x-2y-3z = 2$.

c) Las rectas r y s son coplanarias.

d) Las rectas r y s se cruzan.

25. El valor de λ para que el plano $\pi \equiv 2x+\lambda y-z = 2$ sea paralelo a la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = y+1 = z-2$ es:

a) $\lambda = -1$; **b)** $\lambda = 0$; **c)** $\lambda = -3$; **d)** $\lambda = 1$

26. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x+y &= 1 \\ x-z &= 2 \end{cases}$ es $\pi \equiv x-z = 0$.

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $A = (1,-1,2)$, $B = (2,1,1)$ y $C = (1,2,1)$ es $\pi \equiv x+y+3z-6 = 0$.

c) La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (3,-1,2)$ y es paralela a los planos π y π' de ecuaciones $\pi \equiv x+y-z = 2$, $\pi' \equiv 2x-y-z = 1$ es $r \equiv \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y-z &= 5 \end{cases}$.

d) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P = (0,3,1)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y-z &= 3 \end{cases}$ es $\pi \equiv x+y-z = 2$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

27. Sean α y β números reales y considérense la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z & = \beta \\ 2x-y+z & = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv \alpha x + y + 2z = -1$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Si $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y $\beta = -1$ la recta r está contenida en el plano π.
b) La recta r y el plano π son paralelos para $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y cualquier valor de β.
c) Si $\alpha \neq \dfrac{5}{2}$ y $\beta \neq -1$ la recta r y el plano π se cortan en un único punto.
d) La recta r y el plano π no tienen ningún punto en común para $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y cualquier valor de β.

28. En $\mathbb{R}^4$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Dos planos se pueden cortar en una recta.
b) Dos planos se pueden cortar en un punto.
c) Dos hiperplanos se pueden cortar en una recta.
d) Dos hiperplanos se pueden cortar en un plano.

29. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y & = 1 \\ y-z & = 0 \\ z+t & = 1 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x & = -3-\lambda \\ y & = -1 \\ z & = 4+\lambda \\ t & = 7+\lambda \end{cases}$ Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La mínima subvariedad afín que las contiene es el hiperplano de ecuación $x + z = 1$.
b) Las recats r y s se cortan en el punto $P = (2, -1, -1, 2)$.
c) La mínima subvariedad afín que las contiene es el plano de ecuaciones $\begin{cases} x+z & = 1 \\ x+2y+t & = 2 \end{cases}$.
d) La mínima subvariedad afín que las contiene es $H \equiv (0,1,1,0) + \langle (0,-1,0,2), (-1,0,1,1) \rangle$.

30. Considérense las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$H \equiv (1,0,0,1) + \langle (-1,1,1,-1) \rangle \quad H' \equiv (0,-1,1,4) + \langle (-1,0,1,1), (3,0,-3,-3) \rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $H \cap H' = P = (2,-1,-1,2)$
b) $H + H' \equiv \begin{cases} 2y-z+t & = 1 \\ x+z & = 1 \end{cases}$
c) $H + H' \equiv (1,0,0,1) + \langle (0,1,0,-2), (1,0,1,1) \rangle$
d) $H + H' \equiv (0,-1,1,4) + \langle (-1,1,1,-1), (-2,1,2,0) \rangle$

31. La mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $A = (0,1,0,1)$, $B = (0,0,0,0)$, $C = (1,2,3,2)$, $D = (1,-1,3,-1)$ es:
a) $\mathbb{R}^4$
b) El hiperplano de ecuación $3x + y - z - t = 0$.
c) El plano $\pi \equiv \langle (1,1,3,1), (1,-1,3,-1) \rangle$
d) El plano de ecuaciones $\begin{cases} 3x-z & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases}$

32. Dadas las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$ definidas por los puntos

$$H = \{(0,-1,0,1), (1,1,0,1), (0,0,1,0)\} \quad , \quad H' = \{(-2,1,1,0), (-3,0,0,1)\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

a) H es un hiperplano que contiene a la recta H'.
b) H es un plano que se cruza con la recta H'.
c) H' es una recta que corta al plano H en el punto $P = (1, 7, 7, -5)$.
d) $H \cap H' = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$, $H + H' \equiv z + t = 1$.

33. Dados los planos de $\mathbb{R}^4$ $\pi \equiv \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x - z + t &= 2 \end{cases}$ y $\pi' \equiv \begin{cases} x + z &= 4 \\ y + t &= 6 \end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) Se cortan en la recta de ecuaciones $x - 1 = y - 2 = z - 3 = t - 4$.
b) Se cortan en el punto $P = (1, 2, 3, 4)$
c) Son paralelas.
d) Se cruzan.

34. Dados dos hiperplanos H y H' de $\mathbb{R}^4$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) H y H' se pueden cortar en un plano.
b) H y H' pueden ser paralelos y no coincidentes.
c) H y H' se pueden cortar en una recta.
d) La mínima subvariedad afín que los contiene puede ser $\mathbb{R}^4$.

35. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x &= 2 + 3\lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= -1 + 2\lambda \\ t &= 3 - 2\lambda \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x &= 7\lambda \\ y &= 1 \\ z &= 1 + \lambda \\ t &= -1 + 2\lambda \end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\begin{cases} x - 6z &= 0 \\ y - 11t &= 0 \\ z - 7y &= 0 \end{cases}$.
b) Hay infinitas rectas que se apoyan en ellas y que pasan por el origen.
c) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{7} = \frac{t}{11}$.
d) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\begin{cases} x + 4y - 5z - t &= 0 \\ x - 6z &= 0 \\ t - 11y &= 0 \end{cases}$.

36. La mínima subvariedad afín que contiene a las rectas de ecuaciones

$$x = y = z = t \quad , \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = z - 2 = \frac{t}{-4}$$

es:
a) El plano $\pi \equiv \langle (1, 1, 1, 1), (3, 5, 1, -4) \rangle$.
b) El hiperplano $\pi \equiv \langle (1, 1, 1, 1), (3, 5, 1, -4), (1, 3, -1, -6) \rangle$.
c) No es ni un plano ni un hiperplano.
d) El hiperplano $H \equiv 2x - y - z = 0$.

37. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - z + t &= 2 \\ y + z &= -3 \\ 2x + y &= -2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x + z - t &= 5 \\ x - t &= 3 \end{cases}$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) Se cortan en un punto.
b) La recta está contenida en el plano.
c) Se cruzan.
d) Son paralelos.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

El espacio dual. Geometría afín.

1. c) ; **2. d)** ; **3. c)** ; **4. b)** ; **5. b)** ; **6. b)** ; **7. b)** ; **8. d)** ; **9. c)** ; **10. d)** ;
11. d) ; **12. c)** ; **13. d)** ; **14. d)** ; **15. d)** ; **16. d)** ; **17. d)** ; **18. c)** ; **19. d)** ; **20. b)** ;
21. a) ; **22. c)** ; **23. d)** ; **24. c)** ; **25. c)** ; **26. d)** ; **27. d)** ; **28. c)** ; **29. a)** ; **30. c)** ;
31. c) ; **32. d)** ; **33. b)** ; **34. c)** ; **35. d)** ; **36. d)** ; **37. c)**

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

27-Octubre-2010

Prueba escrita I (1^0 Físicas)

1. Demuestra que el conjunto V de los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tales que $p(2) = 0$ es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$. Calcula su dimensión y una base. **(2 puntos)**

2. Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita y E_1, E_2 dos subespacios. Demuestra que $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son subespacios de E. ¿Cuándo se dice que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios? **(2 puntos)**

3. Define los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial. Demuestra que el vector cero no puede formar parte de una base. **(2 puntos)**

4. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $V = \langle (1, 2, 1), (0, 1, 0) \rangle$
(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$
(c) El vector $(2, 3, 1)$ pertenece a V.
(d) $V = \{(a + b, a, a + b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ **(2 puntos)**

5. Sean V y V' los subespacios de $M(2, \mathbb{R})$ dados por:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : t = x - y, x + z = 0 \right\}, \; V' = \left\{ \begin{pmatrix} a & a + b \\ -a & b \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) $V + V' = M(2, \mathbb{R})$.
(b) V y V' son suplementarios.
(c) $V \cap V' = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
(d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V \cap V'$. **(2 puntos)**

6. Sean E_1 y E_2 los subespacios de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$E_1 = \{(a, a + b, -b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}, \quad E_2 = \{(x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Calcula bases y dimensiones de $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$. **(2 puntos)**

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

15-Diciembre-2010

Prueba escrita II (1^0 Físicas)

1. Sean E_1 y E_2 los subespacios de $M(2,\mathbb{R})$ definidos por:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : x - 2y + z - t = 0 \right\}, \; E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

¿Es cierto que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios? Razona la respuesta. **(2 puntos)**

2. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal inyectiva. Comprueba que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E sus imágenes $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ son vectores linealmente independientes de E'.
(2 puntos)

3. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Calcula la base dual de la base $\{e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 - 2e_3\}$ y las coordenadas de la forma lineal $\omega = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3$ en esta nueva base de E^*. **(2 puntos)**

4. Sea V un subespacio vectorial de E. Define el concepto de incidente V^0 y demuestra que es un subespacio del espacio dual E^*. ¿Cuál es su dimensión? **(2 puntos)**

5. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ su base dual. Representemos por (x, y, z, t) las coordenadas respecto de esta base. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) Sea V es el subespacio de E generado por los vectores $e_1 + e_2$ y $2e_2 - e_3$. ¿La forma lineal $\omega_1 + \omega_4$ está en el subespacio incidente V^0?

(b) ¿Es cierto que $\langle \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_4 \rangle$ es el subespacio incidente de $V = \{(x, y, z, t) \in E : x - 2y + z = 0\}$?

(2 puntos)

6. ¿Es posible que $\begin{Bmatrix} 2x - y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{Bmatrix}$ sean unas ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(0, 0, 1, -1)$, $(1, 2, 1, 1)$ y $(1, 2, 0, 2)$? Razona la respuesta.
(2 puntos)

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

15-Diciembre-2010

Prueba escrita II (2ª Parte) (1^0 Grado en Físicas)

1. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula bases y dimensiones de $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Ker} T$ (2 **puntos**).

(b) Demuestra que los vectores $\bar{e}_1 = e_1 + e_2$, $\bar{e}_2 = e_1 + e_3$ y $\bar{e}_3 = e_2 + e_3$ forman base de $\mathbb{R}^3$ y calcula las coordenadas del vector $e_1 + 3e_2 + e_3$ en dicha base (1,5 **puntos**).

(c) Calcula la matriz de T en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y calcula las coordenadas del vector $T(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ (2,5 **puntos**).

2. Sea V_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x+y+z = 0$ y sea $V_2 = \langle (1,0,-2), (0,1,0) \rangle$ otro subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de V_1 (2 **puntos**).

(b) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de V_2 (2 **puntos**).

(c) Demuestra que V_1 y V_2 se cortan en una recta y calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín cuyo vector de posición es $(0,0,2)$ y cuyo subespacio director es $V_1 \cap V_2$ (3 **puntos**).

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
1° de Grado en Físicas
Departamento de MATEMÁTICAS

Prueba Final (27-Enero-2011)

1ª Parte

1. Sean E_1 y E_2 subespacios de un k-espacio vectorial E.

(a) ¿Qué condiciones deben cumplir E_1 y E_2 para que sean subespacios suplementarios?

(b) Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base de E_1 y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E_2 demuestra que E_1 y E_2 son suplementarios si y sólo si $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E.

(3 puntos)

2. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal.

(a) Define $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ y demuestra que son subespacios de E y E' respectivamente.

(b) Demuestra la fórmula de dimensión: $\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$

(3 puntos)

3. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base del espacio vectorial E.

(a) Define su espacio dual.

(b) Define la base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y describe su relación con las funciones coordenadas sobre E.

(3 puntos)

4. Sea V un subespacio vectorial de E. Define el concepto de incidente V^0 y demuestra que es un subespacio del espacio dual E^*. ¿Qué relación existe entre la base del incidente y las ecuaciones implícitas del subespacio?
Si $\dim E = 4$, ¿es cierto que el subespacio incidente de $V = \langle e_1 - e_2, e_2 + 3e_3 \rangle$ está generado por las formas lineales $3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3$ y ω_4? ¿Pueden ser $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ unas ecuaciones implícitas de V **(3 puntos)**

5. Sea E un espacio vectorial.

(a) Define el concepto de subvariedad afin de E. ¿Cuándo dos subvariedades afines son paralelas? ¿Cuándo se dice que se cruzan? Escribe dos ejemplos.

(b) Si $\dim E = 4$ ¿es posible que dos planos de E que no pasan por el origen se corten en un único punto? Razona la respuesta.

(3 puntos)

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Prueba Final (27-Enero-2011)

2ª Parte

6. En $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se definen los siguientes subconjuntos:

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

(a) Demuestra que V_1 y V_2 son subespacios de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(b) Calcula bases y dimensiones de $V_1, V_2, V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.
(c) Calcula bases y dimensiones de $(V_1 + V_2)^\circ$ y $(V_1 \cap V_2)^\circ$.
(d) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín cuyo vector de posición es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y cuyo subespacio director es $V_1 \cap V_2$.

(**13 puntos**)

7. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y - z,\ x + z,\ 2x + y,\ x + y - z)$$

(a) Demuestra que T es lineal y calcula la matriz asociada a T en las bases a las que están referidas las coordenadas.
(b) Calcula bases y dimensiones de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.
(c) Calcula la matriz de T en la bases:

$$\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$
$$\{(1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^4 .$$

(12 puntos)

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
1° de Grado en Físicas
Departamento de MATEMÁTICAS

Prueba de Recuperación (11-Febrero-2011)

TEORÍA

1. Define el concepto de base de un k-espacio vectorial E y demuestra que todas las bases de E tienen el mismo número de vectores. ¿Qué es la dimensión de un k-espacio vectorial? **(6 puntos)**

2. Sea $E = M(m \times n)$ el k-espacio vectorial de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en k. Considérense los siguientes subconjuntos de E:

$$\mathcal{S} = \{A \in E : A = A^t\} \text{ (Matrices simétricas)}$$
$$\mathcal{H} = \{A \in E : A = -A^t\} \text{ (Matrices hemisimétricas)}$$

Demuestra que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{H}$ son subespacios vectoriales de E y también que son subespacios suplementarios. **(7 puntos)**
*Nota.*Todos los conceptos que se utilicen deberán definirse previamente. En este caso, la definición de subespacio y la de subespacios suplemementarios.

3. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal.

(a) Define $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.
(b) Define en términos de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ cuándo T es inyectiva y cuándo epiyectiva.
(c) Demuestra que si $\dim E = \dim E'$ y T es epiyectiva se verifica que T es un isomorfismo.

(7 puntos)

4. Sea $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo de E de matriz asociada A respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Si $E \xrightarrow{T'} E$ es otro endomorfismo de E de matriz asociada A' en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, ¿cuáles son las matrices asociadas a las composiciones $T \circ T'$ y $T' \circ T$?
(b) Si $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una nueva base de E, ¿cuál es la matriz de T en esta base?
(c) Si $\det A \neq 0$, ¿es cierto que T es un isomorfismo? ¿Existe la aplicación lineal inversa?, en caso afirmativo indica cuál es su matriz asociada.

(7 puntos)

5. Sea V un subespacio vectorial de E.

(a) Define el concepto de subespacio incidente V^0 e indica su dimensión.
(b) Demuestra que $E^0 = \{0\}$ y $\{0\}^0 = E^*$
(c) Calcula el subespacio incidente con el plano π de $\mathbb{R}^4$ dado por $\pi = \langle (1,0,1,0), (0,-1,1,1) \rangle$.

(7 puntos)

6. Estudia razonadamente las posiciones relativas de dos planos en $\mathbb{R}^4$. **(6 puntos)**

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Prueba de Recuperación (11-Febrero-2011)

PROBLEMAS

7. En $\mathbb{R}^3$ se definen los siguientes subconjuntos:

$$V_1 = \{(a+2b, -a, -2b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}\,; \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0\}\,.$$

(a) Demuestra que V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$. **(6 puntos)**
(b) Calcula bases y dimensiones de V_1, V_2, $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$. **(8 puntos)**
(c) Calcula bases y dimensiones de $(V_1 + V_2)^\circ$ y $(V_1 \cap V_2)^\circ$. **(6 puntos)**

(**20 puntos**)

8. Sea E un k-espacio vectorial y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base. Sea $T\colon E \to E$ el endomorfismo de E definido por:

$$T(e_1) = 2e_1 - e_2\,, \quad T(e_2) = e_2 + 2e_3\,, \quad 2e_1 + e_3 \in \ker T\,.$$

(a) Calcula la matriz asociada a T en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. **(4 puntos)**
(b) Calcula bases y dimensiones de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$. **(5 puntos)**
(c) Calcula la matriz de T en la base $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$. **(6 puntos)**
(d) Calcula las coordenadas de los vectores $e_1 + 2e_2 - e_3$ y $T(e_1 - e_2 + 3e_3)$ en la base del apartado anterior. **(5 puntos)**

(20 puntos)

9. Dadas las rectas:

$$r_1 = \langle (1, 2, -1, -3) \rangle \qquad \text{y} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

(a) Calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas de r_1. **(5 puntos)**
(b) Calcula unas ecuaciones paramétricas de r_2. **(5 puntos)**
(c) Estudia su posición relativa y calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas de la mínima subavariedad afín que las contiene. **(10 puntos)**

(20 puntos)

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

27-Octubre-2010

Prueba escrita I (1^0 Físicas)

1. Demuestra que el conjunto V de los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tales que $p(2) = 0$ es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3\rangle$. Calcula su dimensión y una base. **(2 puntos)**
Solución.

$$\begin{aligned} V &= \{p(x) \in E : p(2) = 0\} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in E : a + 2b + 4c + 8d = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in E : a = -2b - 4c - 8d\} = \{(-2b - 4c - 8d, b, c, d) \in E\} \\ &= \langle (-2, 1, 0, 0), (-4, 0, 1, 0), (-8, 0, 0, 1)\rangle = \langle -2 + x, -4 + x^2, -8 + x^3\rangle \end{aligned}$$

Así, hemos probado que V coincide con el conjunto de las combinaciones lineales de los polinomios $-2+x$, $-4+x^2$, $-8+x^3$, luego V es un subespacio vectorial de E, el subespacio generado por esos polinomios.
Calculemos la dimensión y una base de V:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \{-2 + x, -4 + x^2, -8 + x^3\} \text{ es una base de } V.$$

2. Sea E un k-espacio vectorial de dimensión finita y E_1, E_2 dos subespacios. Demuestra que $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$ son subespacios de E. ¿Cuándo se dice que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios? **(2 puntos)**
Solución.
Lee con atención las doce primeras lineas de la sección 1 (SUBESPACIOS SUMA E INTERSECCIÓN. SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS) y la **Definición 2.1** del Tema 2.

3. Define los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial. Demuestra que el vector cero no puede formar parte de una base. **(2 puntos)**
Solución.
Lee con atención las once primeras lineas de la sección 2 (DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL. BASES Y DIMENSIÓN) de la página 2 del Tema 1.

4. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $V = \langle (1, 2, 1), (0, 1, 0)\rangle$
(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$
(c) El vector $(2, 3, 1)$ pertenece a V.
(d) $V = \{(a + b, a, a + b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ **(2 puntos)**

Solución. http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view
(c) es FALSA:

El vector $(2,3,1)$ no está en V pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y por tanto $(2,3,1)$ no es combinación lineal de los vectores $(1,1,1)$ y $(1,0,1)$.

5. Sean V y V' los subespacios de $M(2,\mathbb{R})$ dados por:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : t = x - y, x + z = 0 \right\},\ V' = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ -a & b \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) $V + V' = M(2,\mathbb{R})$.

(b) V y V' son suplementarios.

(c) $V \cap V' = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V \cap V'$. **(2 puntos)**

Solución.
(c) es CIERTA:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V\text{, pues cumple las ecuaciones de } V \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V'\text{, pues se obtiene tomando } a = 1 \text{ y } b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V \cap V'$$

6. Sean E_1 y E_2 los subespacios de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$E_1 = \{(a, a+b, -b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\},\quad E_2 = \{(x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Calcula bases y dimensiones de $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$. **(2 puntos)**

Solución.

$$E_1 = \langle u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,-1) \rangle ; \dim_{\mathbb{R}} E_1 = \operatorname{rg}(u_1, u_2) = 2$$
$$E_2 = \langle v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1) \rangle ; \dim_{\mathbb{R}} E_2 = \operatorname{rg}(v_1, v_2) = 2$$

Se obtiene:

• $E_1 + E_2 = \langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$, $\dim_{\mathbb{R}}(E_1 + E_2) = \operatorname{rg}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 3$ y $\{u_2, v_1, v_2\}$ es una base de $E_1 + E_2$ ya que $\det(u_2, v_1, v_2) \neq 0$.

• $\dim_{\mathbb{R}}(E_1 \cap E_2) = \dim_{\mathbb{R}} E_1 + \dim_{\mathbb{R}} E_1 - \dim_{\mathbb{R}}(E_1 + E_2) = 1$. Calculemos una base de $E_1 \cap E_2$:

$$e \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e \in E_1 : e = au_1 + bu_2 = (a, a+b, -b) \\ e \in E_2 : e = xv_1 + yv_2 = (x, y, y) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, a+b, -b) = (x, y, y) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ -b = y \end{cases}$$

y se obtiene $x = 2y$, luego $e = (2y, y, y)$ y $E_1 \cap E_2 = \langle (2,1,1) \rangle$.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

15-Diciembre-2010

Prueba escrita II (1^0 Físicas)

1. Sean E_1 y E_2 los subespacios de $M(2,\mathbb{R})$ definidos por:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : x - 2y + z - t = 0 \right\}, \; E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

¿Es cierto que E_1 y E_2 son subespacios suplementarios? Razona la respuesta. **(2 puntos)**
Solución.
El vector $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ de E_2 pertenece al subespacio E_1, ya que sus coordenadas verifican la ecuación de E_1, $1 - 2(-2) - 2 - 3 = 0$. Luego el subespacio E_2 está contenido en E_1, por tanto $E_1 \cap E_2 = E_2 \neq \{0\}$ y en consecuencia E_1 y E_2 **no son suplementarios**.

2. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal inyectiva. Comprueba que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E sus imágenes $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ son vectores linealmente independientes de E'.
(2 puntos)
Solución.
Si $\lambda_1 T(e_1) + \cdots + \lambda_n T(e_n) = 0$, por ser T lineal resulta que $T(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$, luego el vector $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \ker T$ y como $\ker T = \{0\}$, por ser T inyectiva, se deduce que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, por tanto $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ ya que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente independientes. Así pues, los vectores $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ son linealmente independientes.

3. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Calcula la base dual de la base $\{e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_2 - 2e_3\}$ y las coordenadas de la forma lineal $\omega = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3$ en esta nueva base de E^*. **(2 puntos)**
Solución.
La matriz B del cambio de base en E es $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
La matriz B^* del cambio de base en el espacio dual E^* es

$$B^* = (B^{-1})^t = \frac{1}{\det B} \operatorname{Adj} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como las columnas de B^* son las coordenadas de la base dual nueva $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ en función de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, se tiene que

$$\{\bar{\omega}_1 = 2\omega_1 - 2\omega_2 - \omega_3, \bar{\omega}_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3, \bar{\omega}_3 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3\}$$

es la base dual pedida.

El cambio de base para la forma lineal $\omega = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3$ de E^* viene dado por:
http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-1/descargar-curso-completo/view

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = B^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

luego $(2, -1, 5)$ son las coordenadas de ω en la base dual nueva, esto es:

$$\omega = -\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + 5\bar{\omega}_3 \, .$$

4. Sea V un subespacio vectorial de E. Define el concepto de incidente V^0 y demuestra que es un subespacio del espacio dual E^*. ¿Cuál es su dimensión? **(2 puntos)**
Solución.

$$V^0 = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$$

Veamos que V es cerrado por combinaciones lineales:
Si $\omega, \omega' \in V^0$ y $\lambda, \mu \in k$, para cada $v \in V$ se tiene: $(\lambda\omega + \mu\omega')(v) = \lambda\omega(v) + \mu\omega'(v) = 0 \Rightarrow \lambda\omega + \mu\omega' \in V^0$.
La dimension del incidente es $\dim_k V^0 = \dim_k E - \dim_k V$

5. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ su base dual. Representemos por (x, y, z, t) las coordenadas respecto de esta base. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) Sea V es el subespacio de E generado por los vectores $e_1 + e_2$ y $2e_2 - e_3$. ¿La forma lineal $\omega_1 + \omega_4$ está en el subespacio incidente V^0?
(b) ¿Es cierto que $\langle \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_4 \rangle$ es el subespacio incidente de $V = \{(x, y, z, t) \in E : x - 2y + z = 0\}$?

(2 puntos)
Solución.

(a) No, pues $(\omega_1 + \omega_4)(e_1 + e_2) = 1 \neq 0$.
(b) El incidente de V está generado por la forma lineal $\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3$ que claramente no es proporcional a $\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_4$. Luego la respuesta en este caso es también NO.

6. ¿Es posible que $\left\{ \begin{matrix} 2x - y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{matrix} \right\}$ sean unas ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(0, 0, 1, -1)$, $(1, 2, 1, 1)$ y $(1, 2, 0, 2)$? Razona la respuesta.
(2 puntos)
Solución.
No, pues el vector $(0, 0, 1, -1)$ no cumple las dos ecuaciones.

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

15-Diciembre-2010

Solución prueba escrita II (2ª Parte) (1^0 Grado en Físicas)

1. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula bases y dimensiones de $\operatorname{Im} T$ y $\operatorname{Ker} T$ (2 **puntos**).
(b) Demuestra que los vectores $\bar{e}_1 = e_1 + e_2$, $\bar{e}_2 = e_1 + e_3$ y $\bar{e}_3 = e_2 + e_3$ forman base de $\mathbb{R}^3$ y calcula las coordenadas del vector $e_1 + 3e_2 + e_3$ en dicha base (1,5 **puntos**).
(c) Calcula la matriz de T en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y calcula las coordenadas del vector $T(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ (2,5 **puntos**).

Solución 1.

(a) Escribamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como el determinante de A es nulo y el menor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es no nulo, se sigue que el rango de A es 2 y por lo tanto la dimensión de la imagen de T es 2 y una base de la misma es:

$$\operatorname{Im} T = \langle (1,2,1), (1,1,0) \rangle .$$

Aplicando la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} T$$

se deduce que la dimensión de $\operatorname{Ker} T$ es 1. Calculemos ahora el vector que genera el núcleo.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot (x,y,z)^t = (0,0,0)^t\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0,\ 2x + y + 3z = 0,\ x + z = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x,\ z = -x\} = \langle (1,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

(b) Veamos que $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ son base de $\mathbb{R}^3$. Por la teoría sabemos que para que 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ formen base basta con ver si son linealmente independientes, y esto es cierto porque el determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es distinto de cero.

Además la matriz de cambio de base (de la base nueva $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a la base antigua $\{e_1, e_2, e_3\}$) es precisamente B, luego las coordenadas del vector $e_1 + 3e_2 + e_3$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ son:

$$B^{-1}(1,3,1)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} .$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

(*c*) Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\{e_1,e_2,e_3\}} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{\{e_1,e_2,e_3\}} \\ {\scriptstyle B}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B^{-1}} \\ \mathbb{R}^3_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^3_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} \end{array}$$

La matriz de T en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es $\bar{A}$ y por lo tanto:

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Las coordenadas respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ del vector $T(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)$ pueden calcularse, por ejemplo, así:

$$T(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = B \cdot \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1, -1, 0)$$

2. Sea V_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x+y+z = 0$ y sea $V_2 = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle$ otro subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(*a*) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de V_1 (2 **puntos**).
(*b*) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de V_2 (2 **puntos**).
(*c*) Demuestra que V_1 y V_2 se cortan en una recta y calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín cuyo vector de posición es $(0, 0, 2)$ y cuyo subespacio director es $V_1 \cap V_2$ (3 **puntos**).

Solución 2.

(*a*) La ecuación implícita de V_1 es $x+y+z = 0$. Para calcular las paramétricas observemos que se calcula una base de V_1 como sigue:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = -x - y\} = \\ &= \{(x, y, -x - y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle \end{aligned}$$

Como todo vector (x, y, z) de V_1 se expresa, de modo único, como combinación lineal de los elementos de la base:

$$(x, y, z) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

se tiene que las ecuaciones paramétricas de V_1 son:

$$x = \lambda\,, \quad y = \mu\,, \quad z = -\lambda - \mu$$

(*b*) Como $(1, 0, -2)$ y $(0, 1, 0)$ no son proporcionales forman base de V_2. Las ecuaciones paramétricas de $V_2 = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 0) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ son:

$$x = \lambda\,, \quad y = \mu\,, \quad z = -2\lambda\,.$$

Calcularemos su ecuación implícita primero por la teoría del rango. Un vector $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vive en V si y sólo si se expresa como combinación lineal (de modo único) de v_1 y v_2, y por tanto, si y sólo si:

$$\operatorname{rg}(e, v_1, v_2) = \operatorname{rg}(v_1, v_2) = 2\,,$$

lo que equivale a la anulación del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego la ecuación implícita de V_2 es $2x + z = 0$.

http://ocw.ub.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descarga-curso-completo.html

Calculemos ahora por la teoría del incidente. La dimensión de $\overset{\circ}{V_2}$ es 1 ($\dim \mathbb{R}^3 - \dim V_2$), y se tiene:

$$\begin{aligned} V_2^\circ &:= \{\omega = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3,*} \,|\, \omega(v_1) = 0 \text{ y } \omega(v_2) = 0\} = \\ &= \{(\alpha, \beta, \gamma) \,|\, \alpha - 2\gamma = 0, \, , \beta = 0\} = \langle (2, 0, 1) \rangle = \langle \theta \rangle \end{aligned}$$

Sabemos que $V_2 = \left(\overset{\circ}{V_2}\right)^\circ$, luego un vector $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yace en V_2 si y sólo si $\theta(x, y, z) = 0$, es decir, si y sólo si $2x + z = 0$.

(c) Puede comprobarse que v_1, v_2, u_1 son base de $V_1 + V_2$, luego $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = 3$ y de la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$$

se deduce que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 1 \,,$$

y por lo tanto se cortan en una recta.

Observemos que $(1, 1, -2) = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ es un vector que está en V_1 y V_2, luego está en $V_1 \cap V_2$. Como $V_1 \cap V_2$ es de dimensión 1, se sigue que $V_1 \cap V_2 = \langle (1, 1, -2) \rangle$.

Las ecuaciones paramétricas de la variedad afín $(0, 0, 2) + \langle (1, 1, -2) \rangle$ son:

$$x = \lambda \,, \quad y = \lambda \,, \quad z = 2 - \lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sus ecuaciones implícitas son:

$$x + y + z = 2 \qquad 2x + z = 2$$

(basta sustituir el punto $(0, 0, 2)$ en las ecuaciones implícitas de V_1 y V_2).

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
1° de Grado en Físicas
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

Prueba Final (27-Enero-2011)

Soluciones 1ª Parte

1. Sean E_1 y E_2 subespacios de un k-espacio vectorial E.

(a) ¿Qué condiciones deben cumplir E_1 y E_2 para que sean subespacios suplementarios?

(b) Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base de E_1 y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E_2 demuestra que E_1 y E_2 son suplementarios si y sólo si $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E.

(3 puntos)

Solución.

(a) E_1 y E_2 son subespacios suplementarios si $E_1 + E_2 = E$ y $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, o lo que es equivalente, si $E_1 \oplus E_2 = E$.

(b)

$\Rightarrow$ Probaremos que si E_1 y E_2 son suplementarios y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base de E_1 y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E_2 entonces $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E:

Por definición de suma, los vectores $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ generan $E_1 + E_2$ y como $E_1 + E_2 = E$ también generan E.

Como $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, por la fórmula de dimensión $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 = m + p$ y puesto que $E_1 + E_2 = E$ resulta que $\dim E = m + p$. Luego los vectores $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ son linealmente independientes pues generan y $\dim E = m + p$.

$\Leftarrow$ Recíprocamente, demostraremos que si $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ es una base de E siendo $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de E_1 y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ una base de E_2 entonces E_1 y E_2 son suplementarios.

Por definición de suma $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_p\}$ generan $E_1 + E_2$ y como forman base es $\dim(E_1 + E_2) = \dim E$, luego $E_1 + E_2 = E$ pues $E_1 + E_2$ es un subespacio de E de la misma dimensión que E.

Utilizando la fórmula de dimensión $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$ se sigue que $\dim(E_1 \cap E_2) = 0$, luego $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

□

2. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal.

(a) Define $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$ y demuestra que son subespacios de E y E' respectivamente.

(b) Demuestra la fórmula de dimensión: $\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$

(3 puntos)

Solución. Lee la Definición 1.3 y el Teorema 1.4 del archivo de los Temas 3 y 4. □

3. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base del espacio vectorial E.

(a) Define su espacio dual.

(b) Define la base dual de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y describe su relación con las funciones coordenadas sobre E.

(3 puntos)

Solución.

(a) El espacio dual de E es el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de E en el cuerpo de escalares k:

$$E^* = \{E \xrightarrow{\omega} k \text{ lineal}\}$$

Los vectores de E^* se llaman formas lineales.

(b) Cada forma lineal $\omega \in E^*$ queda completamente determinada dando sus imágenes sobre los elementos de una base, luego si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E se pueden definir n formas lineales $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ por las condiciones:

$$\omega_i(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ forman una base de E^* llamada base dual de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.

Además, estas formas lineales de la base dual coinciden con las funciones coordenadas asociadas a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, pues para cada vector $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en esta base se verifica:

$$\omega_i(e) = x_i = \text{ coordenada } i \text{ de } e$$

□

4. Sea V un subespacio vectorial de E. Define el concepto de incidente V^0 y demuestra que es un subespacio del espacio dual E^*. ¿Qué relación existe entre la base del incidente y las ecuaciones implícitas del subespacio?
Si $\dim E = 4$, ¿es cierto que el subespacio incidente de $V = \langle e_1 - e_2, e_2 + 3e_3 \rangle$ está generado por las formas lineales $3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3$ y ω_4? ¿Pueden ser $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ unas ecuaciones implícitas de V **(3 puntos)**

Solución. Para la primera parte, revisa las secciones 5 y 7 del Tema 6.
En cuanto a la segunda, lo primero calculamos la $\dim V = 2$ y recordando la definición de incidente, $V^0 = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0 \forall v \in V\}$, comprobamos que las formas lineales $3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3$ y ω_4 pertenecen a V^0 pues se anulan sobre los vectores de la base de V:

$$(3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3)(e_1 - e_2) = 3 - 3 = 0\,, \quad (3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3)(e_2 + 3e_3) = 3 - 3 = 0$$
$$\omega_4(e_1 - e_2) = 0\,, \quad \omega_4(e_2 + 3e_3) = 0$$

Y como $\dim V^0 = 4 - 2 = 2$, resulta que $V^0 = \langle 3\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3, \omega_4 \rangle$ Recordando ahora que las ecuaciones implícitas de V determinan las relaciones que existen entre las coordenadas de sus vectores, resulta que $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ no pueden ser unas ecuaciones implícitas de V ya que el vector $e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \in V$ no verifica la primera de las ecuaciones $1 + 1 \neq 0$. □

5. Sea E un espacio vectorial.

(a) Define el concepto de subvariedad afin de E. ¿Cuándo dos subvariedades afines son paralelas? ¿Cuándo se dice que se cruzan? Escribe dos ejemplos.

(b) Si $\dim E = 4$ ¿es posible que dos planos de E que no pasan por el origen se corten en un único punto? Razona la respuesta.

(3 puntos)

Solución.

(a) Sea E un k-espacio vectorial de dimensión n y sean V un subespacio de E y e_0 un vector de E. El conjunto

$$H = e_0 + V$$

es una *subvariedad afín de vector de posición e_0 y subespacio director V.*

Se llama dimensión de la subvariedad afín H a la dimensión de su subespacio director, $\dim_k H = \dim_k V$.

Las subvariedades afines de dimensión 0 son los *puntos*, las de dimensión 1 las *rectas*, las de dimensión 2 *los planos* y las de dimensión $n-1$ los *hiperplanos*.

Las subvariedades afines que pasan por el origen son los subespacios.

Dos subvariedades afines son paralelas si el subespacio director de una de ellas está contenido en el de la otra.

Dos subvariedades afines se cortan si tienen algún punto en común.

Dos subvariedades afines se cruzan si ni son paralelas ni se cortan.

Si $\dim_k H \leq \dim_k H'$, las subvariedades afines $H = e_0 + V$, $H' = e'_0 + V'$ son paralelas si $V \subseteq V'$ o lo que es equivalente $V^0 \supseteq V'^0$.

Ejemplo 0.1. En $\mathbb{R}^3$ las rectas $r = (3,-1,0)+\langle(1,-1,2)\rangle$ y $s = (0,1,0)+\langle(-1,1,-2)\rangle$ son paralelas, pues tienen el mismo subespacio director.

En $\mathbb{R}^3$ las rectas $r = (1,1,0) + \langle(0,1,2)\rangle$ y $s = (0,1,1) + \langle(1,1,-1)\rangle$ se cruzan, pues no son paralelas y tampoco se cortan ya que los vectores $(1,0,-1),(0,1,2),(1,1,-1)$ son linealmente independientes.

Ejemplo 0.2. En $\mathbb{R}^4$ el plano $\pi = (1,-1,0,2)+\langle(1,1,1,1),(0,2,1,1)\rangle$ y el hiperplano $H = (0,1,0,1) + \langle(1,1,1,1),(0,2,1,1),(1,0,0,1)\rangle$ son paralelos, pues el subespacio director del primero está contenido en el del segundo.

En $\mathbb{R}^4$ los planos de ecuaciones $\pi \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ x+y-t=1 \end{cases}$, $\pi \equiv \begin{cases} y-z+t=1 \\ 2x-t=0 \end{cases}$ se cruzan:

- No son paralelos ya que sus subespacios directores no coinciden, pues sus incidentes $V^0 = \langle(1,-1,0,0),(1,1,0,-1)\rangle$, $V'^0 = \langle(0,1,-1,1),(2,0,0,-1)\rangle$ son diferentes ya que esto equivale a que el rango de la matriz del sistema determinado por las ecuaciones de ambos planos es distinto de 2:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

- Los planos tampoco se cortan, pues la matriz ampliada con la columna de términos independientes de las ecuaciones no es 3:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} = 4$$

  y esto significa que el sistema no tiene solución, es decir, que los planos no tienen ningún punto en común, $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Lo que prueba que, en efecto, los planos se cruzan.

(b) Si, es posible:

Si $\dim E = 4$, cada uno de los planos tiene dos ecuaciones implícitas, luego el sistema lineal que determinan tiene 4 ecuaciones y 4 incógnitas y por tanto es posible que el rango de la matriz del sistema sea igual a 4 e igual al de la matriz ampliada, lo que signifca que el sistema tiene solución y la subvariedad afín de soluciones, $\pi \cap \pi'$, depende de 0 parámetros, es decir, es un punto.

□

Soluciones 2ª Parte

6. En $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se definen los siguientes subconjuntos:

$$V_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

(a) Demuestra que V_1 y V_2 son subespacios de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(b) Calcula bases y dimensiones de $V_1, V_2, V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.
(c) Calcula bases y dimensiones de $(V_1 + V_2)^\circ$ y $(V_1 \cap V_2)^\circ$.
(d) Calcula las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín cuyo vector de posición es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y cuyo subespacio director es $V_1 \cap V_2$.

(**13 puntos**)

Solución. Para facilitar algunos cálculos identificaremos $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ dando el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} M_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto (1,0,0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto (0,1,0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto (1,0,1,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto (1,0,0,1) \end{aligned}$$

(a) Para ver que $V_1 = \{(a, b, a+b, a+b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ es subespacio hemos de comprobar si es cerrado por combinaciones lineales, es decir, si $\lambda v + \mu v' \in V_1$ para todos:

$$v = (a, b, a+b, a+b),\ v' = (a', b', a'+b', a'+b') \in V_1$$

y para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \lambda v + \mu v' &= \big(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda(a+b) + \mu(a'+b'), \lambda(a+b) + \mu(a'+b')\big) = \\ &= \big(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b'), (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b')\big) \in V_1 \end{aligned}$$

que vive en V_1 pues la tercera y cuarta coordenadas son la suma de la primera y la segunda coordenadas.

El conjunto V_2 es subespacio por definición, es el subespacio generado por:

$$(1,-1,1,0), (1,1,1,1), (0,1,0,0)$$

(todo vector es combinación lineal de estos por definición y por lo tanto es cerrado por combinaciones lineales).

(b) Calculemos las bases pedidas:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a, b, a+b, a+b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,0,1,1) + b(0,1,1,1) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (1,0,1,1), (0,1,1,1) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

y como no son proporcionales, forman base de V_1 y $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 2$.

Los vectores:

$$u_1 = (1,-1,1,0), \quad u_2 = (1,1,1,1), \quad u_3 = (0,1,0,0)$$

son base de V_2 pues el rango de la matriz que forman es 3 (el determinante de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es no nulo). En particular $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3$.

Se tiene así que v_1, v_2, u_1, u_2, u_3 son un sistema de generadores de $V_1 + V_2$, y puesto que $v_1 = u_2 - u_3$ y $\det(v_2, u_1, u_2, u_3) \neq 0$ es:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \operatorname{rg}(v_1, v_2, u_1, u_2, u_3) = \operatorname{rg}(v_2, u_1, u_2, u_3) = 4$$

y $\{v_2, u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $V_1 + V_2$. Por último, sabemos que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$$

y despejando resulta $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 1$. Como además hemos visto que $v_1 = u_2 - u_3$, se concluye:

$$V_1 \cap V_2 = \langle v_1 \rangle = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$$

(c) Hemos visto que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$, luego por las porpiedades del incidente $(V_1 + V_2)^\circ = \{0\}$. Por la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) + \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)^\circ ,$$

luego $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)^\circ = 3$. Podemos calcular una base como sigue:

$$\begin{aligned}(V_1 \cap V_2)^\circ &= \{w \in \mathbb{R}^4 \,|\, w(v_1) = 0\} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \alpha + \gamma + \delta = 0\} = \\ &= \{(-\gamma - \delta, \beta, \gamma, \delta) \,|\, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle = \\ &= \langle -w_1 + w_3, -w_1 + w_4, w_2 \rangle = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle .\end{aligned}$$

(d) Para calcular las ecuaciones paramétricas de la subvariedad afín cuyo vector de posición es $(1, 2, 1, 3)$ y cuyo subespacio director es $V_1 \cap V_2 = \langle (1, 0, 1, 1) \rangle$ basta tener en cuenta que un vector $e = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ yace en dicha subvariedad afín si y sólo si:

$$e = (1, 2, 1, 3) + \lambda(1, 0, 1, 1)$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 + \lambda , \quad y = 2 \quad z = 1 + \lambda , \quad t = 3 + \lambda .$$

Como ya hemos calculado $(V_1 \cap V_2)^\circ$ y por reflexividad sabemos que $(V_1 \overset{\circ}{\cap} V_2)^\circ = V_1 \cap V_2$, un vector $e = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ yace en dicha subvariedad afín si y sólo si:

$$\theta_1(x-1, y-2, z-1, t-3) = 0 \,,\ \theta_2(x-1, y-2, z-1, t-3) = 0 \,,\ \theta_3(x-1, y-2, z-1, t-3) = 0 \,,$$

es decir, las ecuaciones implícitas son:

$$-x + z = 0 , \quad -x + t - 2 = 0 , \quad y - 2 = 0 .$$

□

7. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y - z,\ x + z,\ 2x + y,\ x + y - z)$$

(a) Demuestra que T es lineal y calcula la matriz asociada a T en las bases a las que están referidas las coordenadas.

(b) Calcula bases y dimensiones de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(c) Calcula la matriz de T en la bases:

$$\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{y}$$
$$\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^4 .$$

(12 puntos)

Solución. (a) La aplicación T es lineal si:

$$T\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) = \lambda T(x,y,z)+\mu T(x',y',z') \qquad \forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&T\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big) \overset{(+,\cdot)\mathbb{R}^3}{=} T\big((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')\big) \overset{def.T}{=} \\
&= \big((\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z'), (\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z'),\\
&2(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y'), (\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z')\big) \overset{(+,\cdot)\mathbb{R}}{=} \\
&= \big(\lambda(x+y-z)+\mu(x'+y'-z'), \lambda(x+z)+\mu(x'+z'),\\
&\lambda(2x+y)+\mu(2x'+y'), \lambda(x+y-z)+\mu(x'+y'-z')\big) \overset{(+,\cdot)\mathbb{R}^3}{=} \\
&= \lambda(x+y-z,\ x+z,\ 2x+y,\ x+y-z)+\mu(x'+y'-z',\ x'+z',\ 2x'+y',\ x'+y'-z') \overset{def.T}{=} \\
&= \lambda T(x,y,z)+\mu T(x',y',z')\,.
\end{aligned}$$

Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}$ la de $\mathbb{R}^4$. Como:

$$T(1,0,0)=(1,1,2,1), \quad T(0,1,0)=(1,0,1,1), \quad T(0,0,1)=(-1,1,0,-1)\,,$$

la matriz asociada es $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$

(b) Dado que $2T(e_2)+T(e_3)=T(e_1)$ se sigue que $\operatorname{rg}(A)<3$, y como el menor $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}$ es no nulo se deduce que $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg}(A) = 2$ y $\{T(e_1),T(e_2)\}$ son una base de $\operatorname{Im} T$. Por la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} T\,,$$

luego $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} T = 1$ y como $2T(e_2)+T(e_3)=T(e_1)$ se tiene que $e_1-2e_2-e_3 \in \operatorname{Ker} T$. Por ser éste de dimensión 1 se concluye:

$$\operatorname{Ker} T = \langle e_1-2e_2-e_3\rangle = \langle (1,-2,-1)\rangle\,.$$

(c) Denotemos:

$$\bar{e}_1=(1,1,0)\,, \quad \bar{e}_2=(1,0,1)\,, \quad \bar{e}_3=(0,1,1)$$
$$\bar{e}'_1=(1,0,0,0)\,, \quad \bar{e}'_2=(0,-1,0,0)\,, \quad \bar{e}_3=(0,0,-1,0)\,, \quad \bar{e}'_4=(0,0,0,1)\,.$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^3_{\{e_1,e_2,e_3\}} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^4_{\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4\}} \\
{\scriptstyle B}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle C} \\
\mathbb{R}^3_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^4_{\{\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\bar{e}'_3,\bar{e}'_4\}}
\end{array}$$

donde $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ son las matrices de cambio de base (de las"nuevas" a las "antiguas"). La matriz pedida es $\bar{A}$:

$$\bar{A}=C^{-1}\cdot A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&-2&-1\\-3&-2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

□

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
1° de Grado en Físicas
Gloria Serrano Sotelo
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

Prueba de Recuperación (11-Febrero-2011)

TEORÍA

1. Define el concepto de base de un k-espacio vectorial E y demuestra que todas las bases de E tienen el mismo número de vectores. ¿Qué es la dimensión de un k-espacio vectorial? **(6 puntos)**

Solución.

Teorema 0.1. (Teorema de la base) *Todas las bases de un k-espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ dos bases de E. Por el teorema de Steinitz aplicado a la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$, debe ser $m \leq n$, y ahora a la base $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ da $n \leq m$. Por tanto, $n = m$. □

Se llama dimensión del espacio vectorial E al número de elementos de una base y se representa por $\dim_k E$. □

2. Sea $E = M(m \times n)$ el k-espacio vectorial de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en k. Considérense los siguientes subconjuntos de E:

$$\mathcal{S} = \{A \in E : A = A^t\} \text{ (Matrices simétricas)}$$
$$\mathcal{H} = \{A \in E : A = -A^t\} \text{ (Matrices hemisimétricas)}$$

Demuestra que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{H}$ son subespacios vectoriales de E y también que son subespacios suplementarios. **(7 puntos)**
*Nota.*Todos los conceptos que se utilicen deberán definirse previamente. En este caso, la definición de subespacio y la de subespacios suplemementarios.

Solución. Veamos que ambos subconjuntos son cerrados por combinaciones lineales:

(a) Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathcal{S}$ y escalares $\lambda, \mu \in k$, la matriz combinación lineal $\lambda A + \mu B$ es también simétrica, pues cumple $(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B$, esto es $\lambda A + \mu B \in \mathcal{S}$.

(b) Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathcal{H}$ y escalares $\lambda, \mu \in k$, la matriz combinación lineal $\lambda A + \mu B$ es también hemisimétrica, pues cumple $(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B)$, esto es $\lambda A + \mu B \in \mathcal{H}$.

Demostraremos que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{H}$ son suplementarios probando que *cualquier matriz cuadrada A descompone de modo único como suma de una matriz simétrica y otra hemisimétrica*: Cualquiera que sea $A \in M(m \times n)$ las matrices $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $H = \frac{1}{2}(A - A^t)$ son, respectivamente, simétrica y hemisimétrica pues $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ y $(A - A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$. Y se verifica:

$$A = S + H\,, \text{ siendo } S = \frac{1}{2}(A + A^t) \in \mathcal{S} \text{ y } H = \frac{1}{2}(A - A^t) \in \mathcal{H}$$

□

3. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal.
http://www.yoquieroaprobar.es/enseñanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

(a) Define $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
(b) Define en términos de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ cuándo T es inyectiva y cuándo epiyectiva.
(c) Demuestra que si $\dim E = \dim E'$ y T es epiyectiva se verifica que T es un isomorfismo.

(7 puntos)

Solución.

(a) Define $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

$$\ker T = \{e \in E : T(e) = 0\} \subseteq E$$
$$\operatorname{Im} T = \{e' \in E' : e' = T(e)\,,\ \text{para algún } e \in E\} \subseteq E'$$

(b) T es inyectiva si y sólo si $\ker T = \{0\}$. T es epiyectiva si y sólo si $\operatorname{Im} T = E'$.
(c) Utilizando la fórmula de dimensión $\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k \operatorname{Im} T$ y que T es epiyectiva y por tanto $\operatorname{Im} T = E'$ se obtiene que $\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k E'$ y como $\dim_k E = \dim_k E'$ resulta que $\dim_k \ker T = 0$, luego $\ker T = \{0\}$, es decir, T es también inyectiva y por tanto un isomorfismo.

□

4. Sea $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo de E de matriz asociada A respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Si $E \xrightarrow{T'} E$ es otro endomorfismo de E de matriz asociada A' en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, ¿cuáles son las matrices asociadas a las composiciones $T \circ T'$ y $T' \circ T$?
(b) Si $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una nueva base de E, ¿cuál es la matriz de T en esta base?
(c) Si $\det A \neq 0$, ¿es cierto que T es un isomorfismo? ¿Existe la aplicación lineal inversa?, en caso afirmativo indica cuál es su matriz asociada.

(7 puntos)

Solución.

(a) La matriz asociada a $T \circ T'$ es $A \cdot A'$. En efecto:

$$(T \circ T')(e_j) = T(T'(e_j)) = T(\sum_{i=1}^{n} a'_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ki} a'_{ij}) e_k = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot A')_{kj} e_k$$

Análogamente se prueba que $A' \cdot A$ es la matriz asociada $T' \circ T$.

(b) Si representamos por $\bar{A}$ la matriz de T en esta nueva base y por B la matriz del cambio de base es $\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$, como se sigue del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_A"] & E \\ E \arrow[u, "Id_B"] \arrow[r, "T_{\bar{A}}"] & E \arrow[u, "Id_B"'] \end{tikzcd} \qquad T_{\bar{A}} = Id_B^{-1} \circ T_A \circ Id_B \Rightarrow \bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$$

(c) Si $\det A \neq 0$ el rango de A es máximo, esto es $\operatorname{rg} A = \dim_k \operatorname{Im} T = \dim_k E$, de lo que se sigue:
$\operatorname{Im} T = E$ y también, por la fórmula de dimensión $\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k \operatorname{Im} T$, es $\ker T = \{0\}$. Luego T es epiyectiva e inyectiva, es decir, un isomorfismo. Por tanto, existe aplicación lineal inversa $E \xrightarrow{T^{-1}} E$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}$, cuya matriz asociada en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es A^{-1}.

□

5. Sea V un subespacio vectorial de E.
http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

(a) Define el concepto de subespacio incidente V^0 e indica su dimensión.
(b) Demuestra que $E^0 = \{0\}$ y $\{0\}^0 = E^*$
(c) Calcula el subespacio incidente con el plano π de $\mathbb{R}^4$ dado por $\pi = \langle (1,0,1,0), (0,-1,1,1)\rangle$.
(7 puntos)

Solución. (a) Subespacio incidente V^0 y dimensión:

$$V^0 = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0 \text{ , para todo } v \in V\}, \quad \dim_k V^0 = \dim_k E - \dim_k V$$

(b) $\dim_k E^0 = \dim_k E - \dim_k E = 0 \Rightarrow E^0 = \{0\}$.
$\{0\}^0 \subseteq E^*$ y $\dim_k \{0\}^0 = \dim_k E - 0 = \dim_k E^* \Rightarrow \{0\}^0 = E^*$
(c) Ecuaciones implícitas de π

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow x - y - z = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -y - t = 0 \end{array} \right\}$$

Luego $\pi^0 = \langle \omega_1 - \omega_2 - \omega_3, \omega_2 + \omega_4 \rangle$, siendo $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ la base dual de la base de $\mathbb{R}^4$ en la que vienen expresadas las coordenadas.

□

6. Estudia razonadamente las posiciones relativas de dos planos en $\mathbb{R}^4$. **(6 puntos)**

Solución. Sean $\pi = e_0 + V$, $\pi' = e_0' + V'$ dos planos cualesquiera de $\mathbb{R}^4$ y sean $\{\theta_1, \theta_2\}$, $\{\theta_1', \theta_2'\}$ bases de V^0 y V'^0 respectivamente.
Las ecuaciones implícitas de π y de π' definen un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas de matriz asociada A y matriz ampliada con la columna de términos independientes $\bar{A}$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv \begin{cases} \theta_1(e) = \theta_1(e_0) \\ \theta_2(e) = \theta_2(e_0) \end{cases} \\ \pi' \equiv \begin{cases} \theta_1'(e) = \theta_1'(e_0') \\ \theta_2'(e) = \theta_2'(e_0') \end{cases} \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} & \theta_1(e_0) \\ A & \theta_2(e_0) \\ & \theta_1'(e_0') \\ & \theta_2'(e_0') \end{pmatrix}$$

El rango de A es como poco 2 y como mucho 4, $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$ y puesto que $\operatorname{rg} A \leq \bar{A} \leq \operatorname{rg} A + 1$ se obtiene:

- Si $\operatorname{rg} A = 2$, los planos son paralelos, pues $V^0 = V'^0$, y se pueden presentar dos casos:
  Caso 1. $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg} \bar{A} = 2$, *los planos son coincidentes*, pues el sistema tiene solución y la subvariedad afín de soluciones depende de 4-2=2 parámetros.
  Caso 2. $\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg} \bar{A} = 3$, *los planos son paralelos no coincidentes* ya que no tienen puntos en común, pues el sistema no tiene solución.
- Si $\operatorname{rg} A = 3$, los planos no son paralelos y pueden presentarse los casos:
  Caso 3. $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} \bar{A} = 3$, *los planos se cortan en una recta*, pues el sistema tiene solución y la subvariedad afín de soluciones depende de 4-3=1 parámetro.
  Caso 4. $\operatorname{rg} A = 3 \neq \operatorname{rg} \bar{A} = 4$, *los planos se cruzan*, pues ni son paralelos ni se cortan ya que el sistema no tiene solución.
- Si $\operatorname{rg} A = 4$, la única posibilidad es que $\operatorname{rg} \bar{A} = 4$, lo que sólo da el caso:
  Caso 5. $\operatorname{rg} A = 4 = \operatorname{rg} \bar{A} = 4$, *los planos se cortan en un punto*, pues el sistema tiene solución y la subvariedad afín de soluciones depende de 4-4=0 parámetros.

□

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Prueba de Recuperación (11-Febrero-2011)

PROBLEMAS

7. En $\mathbb{R}^3$ se definen los siguientes subconjuntos:

$$V_1 = \{(a+2b, -a, -2b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}\,; \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0\}\,.$$

(a) Demuestra que V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$. **(6 puntos)**
(b) Calcula bases y dimensiones de V_1, V_2, $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$. **(8 puntos)**
(c) Calcula bases y dimensiones de $(V_1 + V_2)^\circ$ y $(V_1 \cap V_2)^\circ$. **(6 puntos)**
(**20 puntos**)

Solución. (a) Para ver que V_1 es subespacio hemos de comprobar si es cerrado por combinaciones lineales, es decir, si $\lambda v + \mu v' \in V_1$ para todos:

$$v = (a+2b, -a, -2b),\ v' = (a'+2b', -a', -2b') \in V_1$$

y para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\lambda v + \mu v' = \big(\lambda a + \mu a' + 2\lambda b + 2\mu b', -\lambda a - \mu a', -2\lambda b - 2\mu b'\big) \in V_1$$

que vive en V_1 pues la suma de la segunda y tercera coordenadas es igual a menos la primera coordenada.

Análogamente V_2 es cerrado por combinaciones lineales, pues dados $u = (x, y, z) \in V_2$ y $u' = (x', y', z') \in V_2$ cualesquiera, sabemos que:

$$x + y - 2z = 0 \quad \text{y} \quad x' + y' - 2z' = 0$$

luego para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda u + \mu u' = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \in V_2$$

ya que:

$$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - 2z) + \mu(x' + y' - 2z') = 0\,.$$

(b) Calculemos las bases pedidas:

$$V_1 = \{(a+2b, -a, -2b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,-1,0) + b(2,0,-2) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \langle (1,-1,0), (2,0,-2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$$

y como no son proporcionales, forman base de V_1 y $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 2$.

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - 2z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -y + 2z\} =$$
$$= \{(-y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0), (2,0,1)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$$

y como no son proporcionales, forman base de V_2 y $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$.

Los vectores v_1, v_2, u_1, u_2 forman un sistema de generadores de $V_1 + V_2$ y se tiene que $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \operatorname{rg}(v_1, v_2, u_1, u_2) \leq 3$. Como $\det(v_1, v_2, u_2) \neq 0$ se deduce que $\{v_1, v_2, u_2\}$ son base de $V_1 + V_2$ y $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = 3$.

Por la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$$

resulta que $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) = 1$ y puesto que $u_1 = -v_1$ se concluye que:

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

$$V_1 \cap V_2 = \langle u_1 \rangle = \langle (-1, 1, 0) \rangle$$

(c) Hemos visto que $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$, luego por las porpiedades del incidente $(V_1 + V_2)^\circ = \{0\}$. Por la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) + \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)^\circ ,$$

luego $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)^\circ = 2$. Podemos calcular una base como sigue:

$$\begin{aligned}(V_1 \cap V_2)^\circ &= \{w \in \mathbb{R}^3 \,|\, w(u_1) = 0\} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -\alpha + \beta = 0\} = \\ &= \{(\alpha, \alpha, \gamma) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \\ &= \langle w_1 + w_2, w_3 \rangle = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle .\end{aligned}$$

□

8. Sea E un k-espacio vectorial y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base. Sea $T\colon E \to E$ el endomorfismo de E definido por:

$$T(e_1) = 2e_1 - e_2 , \quad T(e_2) = e_2 + 2e_3 , \quad 2e_1 + e_3 \in \ker T .$$

(a) Calcula la matriz asociada a T en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. **(4 puntos)**
(b) Calcula bases y dimensiones de $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$. **(5 puntos)**
(c) Calcula la matriz de T en la base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. **(6 puntos)**
(d) Calcula las coordenadas de los vectores $e_1 + 2e_2 - e_3$ y $T(e_1 - e_2 + 3e_3)$ en la base del apartado anterior. **(5 puntos)**

(20 puntos)

Solución. (a) Por definición, la matriz asociada a T en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tiene por columnas $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$, y tenemos:

$$T(e_1) = (2, -1, 0) , \quad T(e_2) = (0, 1, 2) .$$

Para calcular $T(e_3)$ basta observar que como $2e_1 + e_3 \in \ker T$ entonces $T(2e_1 + e_3) = 0$, y dado que T es una aplicación lineal:

$$T(e_3) = -2T(e_1) = (-4, 2, 0) .$$

Luego la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg}(A) = 2$ y $\{T(e_1), T(e_2)\} = \{(2, -1, 0), (0, 1, 2)\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$. Por la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T + \dim_{\mathbb{R}} \ker T$$

se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$ y por lo tanto $\ker T = \langle 2e_1 + e_3 \rangle = \langle (2, 0, 1) \rangle$.

(c) Denotemos $\bar{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, 0, 1)$ y $\bar{e}_3 = (0, 1, 1)$. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\{e_1,e_2,e_3\}} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{\{e_1,e_2,e_3\}} \\ {\scriptstyle B}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B^{-1}} \\ \mathbb{R}^3_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} & \xrightarrow{\bar{A}} & \mathbb{R}^3_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} \end{array}$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base nueva a la base antigua. La matriz de T en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es $\bar{A}$ y por lo tanto:

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} .$$

(d) Las coordenadas respecto de la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de los vectores $e_1 + 2e_2 - e_3$ y $T(e_1 - e_2 + 3e_3)$ pueden calcularse, por ejemplo, así:

$$(e_1 + 2e_2 - e_3)_{\{\bar{e}_i\}} = B^{-1}(e_1 + 2e_2 - e_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2, -1, 0)$$

$$T(e_1 - e_2 + 3e_3)_{\{\bar{e}_i\}} = B^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2, -8, -6)$$

□

9. Dadas las rectas:

$$r_1 = \langle (1, 2, -1, -3) \rangle \qquad \text{y} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = -1 \\ t = 0 \end{cases}$$

(a) Calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas de r_1. **(5 puntos)**
(b) Calcula unas ecuaciones paramétricas de r_2. **(5 puntos)**
(c) Estudia su posición relativa y calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas de la mínima subavariedad afín que las contiene. **(10 puntos)**

(20 puntos)

Solución. (a) Escribamos $r_1 = e_0 + \langle v_1 \rangle$, donde $e_0 = (0, 0, 0, 0)$ y $v_1 = (1, 2, -1, -3)$. Todo vector $e = (x, y, z, t)$ de r_1 se escribe $(x, y, z, t) = \lambda(1, 2, -1, -3)$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$), luego las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \lambda\,, \quad y = 2\lambda\,, \quad z = -\lambda\,, \quad t = -3\lambda\,.$$

Por la teoría del rango, un vector $e \in \mathbb{R}^4$ vive en r_1 si y sólo si $\operatorname{rg}(e, v_1) = \operatorname{rg}(v_1) = 1$, en coordenadas:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Fijado un menor de orden 1 no nulo (por ejemplo 1), esta condición equivale a la anulación de los siguientes tres menores de orden 2:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} x & z \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} x & t \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

luego las ecuaciones implícitas de r_1 son:

$$2x - y = 0\,, \quad x + z = 0\,, \quad 3x + t = 0\,.$$

(b) Dadas las ecuaciones implícitas se tiene:

$$\begin{aligned} r_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - 3 = 0\,,\, 2x - z + 1 = 0\,,\, t = 0\} = \\ &= \{(x, y, z, t) \,|\, y = 3 - x\,,\, z = 1 + 2x\,,\, t = 0\} = \\ &= \{(x, 3 - x, 1 + 2x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (0, 3, 1, 0) + \langle (1, -1, 2, 0) \rangle = e_0' + \langle v_2 \rangle\,. \end{aligned}$$

http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/algebra-lineal-y-geometria-i/descargar-curso-completo/view

Por lo tanto, un vector $e = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vive en r_2 si y sólo si $e = e'_0 + \mu v_2$. En coordenadas obtenemos unas ecuaciones paramétricas de r_2:

$$x = \mu\,, \quad y = 3 - \mu\,, \quad z = 1 + 2\mu\,, \quad t = 0\,.$$

(c) Tenemos:

$$r_1 = e_0 + \langle v_1 \rangle \quad \text{donde} \quad e_0 = (0,0,0,0) \text{ y } v_1 = (1,2,-1,-3)\,.$$
$$r_2 = e'_0 + \langle v_2 \rangle \quad \text{donde} \quad e'_0 = (0,3,1,0) \text{ y } v_2 = (1,-1,2,0)\,.$$

Puesto que v_1 y v_2 no son proporcionales entonces r_1 y r_2 no son paralelas ni coincidentes. Veamos si se cortan. Si así fuera existiría algún punto en $r_1 \cap r_2$, pero como el sistema:

$$\lambda = \mu\,, \quad 2\lambda = 3 - \mu\,, \quad -\lambda = 1 + \mu\,, \quad -3\lambda = 0$$

no tiene solución, entonces no se cortan. En definitiva, r_1 y r_2 se cruzan.

Por definición, la mínima subvariedad afín que contiene a r_1 y r_2 es la subvariedad afín suma:

$$r_1 + r_2 = e_0 + \langle e_0 - e'_0, v_1, v_2 \rangle = (0,0,0,0) + \langle (0,-3,-1,0), (1,2,-1,-3), (1,-1,2,0) \rangle$$

(luego es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, pues pasa por el origen) y su dimensión es $\operatorname{rg}(e_0 - e'_0, v_1, v_2) = 3$ (es un hiperplano en $\mathbb{R}^4$). Se tiene entonces que un vector $e = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vive en $r_1 + r_2$ si y sólo si $e = \lambda(e_0 - e'_0) + \mu v_1 + \eta v_2$ (con $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$), y por lo tanto unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= \mu + \eta \\ y &= -3\lambda + 2\mu - \eta \\ z &= -\lambda - \mu + 2\eta \\ t &= -3\mu \end{aligned}$$

Por al fórmula de la dimensión:

$$\dim_R (r_1 + r_2)^\circ = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} (r_1 + r_2) = 4 - 3 = 1$$

se tiene que $r_1 + r_2$ viene definida por una ecuación implícita, que deduciremos calculando el incidente a $r_1 + r_2$.

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)^\circ &= \{ w = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \mid w(e_0 - e'_0) = 0\,,\ w(v_1) = 0\,,\ w(v_2) = 0 \} = \\ &= \{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \mid -3\beta - \gamma = 0\,,\ \alpha + 2\beta - \gamma - 3\delta = 0\,,\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \} = \\ &= \{ (7\beta, \beta, -3\beta, 4\beta) \mid \beta \in \mathbb{R} \} = \langle (7, 1 - 3, 4) \rangle \end{aligned}$$

Luego una ecuación implícita de $r_1 + r_2$ es $7x + y - 3z + 4t = 0$.

□