UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA UNIDAA Azcapotzalco
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES (Trimestre 09I / 13 abril)
Nombre: ____ Grupo: ________
Matrícula: ________________________________16:00 – 19:00 hrs.

Nota: Los ejercicios marcados con (*nn%) conforman el examen global.

PRIMERA PARTE

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.
   a) **(*10%)** $y^2\,dx-\left(x^2+xy\right)dy=0$
   b) $\left(\dfrac{y}{\left(x+y\right)^2}-1\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{\left(x+y\right)^2}\right)dy=0$ c) $\dfrac{dx}{dt}=x+t^3$
2. **(*15 %)** Un tanque de 50 galones de capacidad contiene inicialmente 10 galones de agua pura. Para $t=0$, una solución salina que contiene 1 libra de sal por galón se vierte en el tanque a razón de 4 gal/ min, mientras que una solución bien mezclada sale del tanque a una razón de 2 gal/ min. Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque en el momento en que éste se llena.
3. **(*10%)** La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha elevado el nivel de cobalto radiactivo en la región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable? (ignore la presencia de otros elementos radiactivos).

SEGUNDA PARTE

1. **(*10%)** a) Verifique que la función $y_1=\cos\left(\ln\left(x\right)\right)$ es solución de la ecuación diferencial $x^2y''+xy'+y=0$.
   b) Encuentre una segunda solución y_2 de la ecuación diferencial que forme junto con y_1 un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.
   c) Escriba la solución general de la ecuación diferencial.
2. **(*15%)** Halle la solución de la ecuación $y''+4y=\cos(2x)-x$ con $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.
3. **(*10%)** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y''+y'-2y=\ln\left(x\right)$.

TERCERA PARTE

1. **(*15%)** Un cuerpo que pesa 64 libras está sujeto al extremo de un resorte y lo estira 0.32 pies. El cuerpo ocupa una posición que está $^2\!/_3$ pies sobre la posición de equilibrio y desde ahí se le comunica una velocidad dirigida hacia abajo de 5 pies/s.
   a) Encuentre la ecuación de movimiento.
   b) ¿Cuántas oscilaciones completas habrá realizado el peso después de 3π segundos?
   c) ¿En qué instantes alcanza el peso por primera vez sus desplazamientos extremos hacia uno y otro lado de la posición de equilibrio?
2. **(*15%)** Un cuerpo que pesa 10 lb sujeto a un resorte lo alarga 2 pies. El cuerpo se sujeta a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numérica igual a β veces ($\beta>0$) la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguación β de modo que el movimiento subsiguiente sea a) sobreamortiguado, b) subamortiguado, c) críticamente amortiguado.
3. Una resistencia de 2 ohms, un capacitor de 0.25 farads y una inductancia de 1 henry, se conectan en serie a una fuerza electromotriz $E\left(t\right)=100sen\left(60t\right)$, determine $q\left(t\right)$ e $i\left(t\right)$ si $q\left(0\right)=i\left(0\right)=0$.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA UNIDAA Azcapotzalco
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES (Trimestre 09I / 13 abril)

SOLUCIÓN

Nota: Los ejercicios marcados con (*nn%) conforman el examen global.

PRIMERA PARTE

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) **(*10%)** $y^2\,dx-\left(x^2+xy\right)dy=0$

1 a) **(*10%)** $y^2\,dx-\left(x^2+xy\right)dy=0$

1 a) La ecuación diferencial dada es homogénea:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{\left(x^2+xy\right)}=\frac{y^2/xy}{\left(x^2+xy\right)/xy}=\frac{y/x}{\left(x/y+1\right)},$$

haciendo el cambio de variable $u=\dfrac{y}{x}$ ó $y=ux$ tenemos que $y'=u'x+u$,

sustituyendo en la ecuación diferencial en su forma última tenemos

$u'x+u=\dfrac{u}{\left(1/u+1\right)}=\dfrac{u^2}{1+u}$. Por lo tanto $u'x=\dfrac{u^2}{1+u}-u=\dfrac{-u}{1+u}$ ó $\dfrac{1+u}{u}du=\dfrac{-dx}{x}$.

Al integrar obtenemos

$\ln u+u=-\ln x+C$. Por lo tanto la solución es $\ln(\dfrac{y}{x})+\dfrac{y}{x}=-\ln x+C$.

1 b) $\left(\dfrac{y}{(x+y)^2}-1\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{(x+y)^2}\right)dy=0$

1 b) La ecuación dada es exacta ya que

$$M_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}-1\right)=\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{(-2)y}{(x+y)^3}=\frac{x+y-2y}{(x+y)^3}=\frac{x-y}{(x+y)^3}\text{ y}$$

$$N_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\frac{x}{(x+y)^2}\right)=\frac{-1}{(x+y)^2}-\frac{(-2)x}{(x+y)^3}=\frac{-x-y+2x}{(x+y)^3}=\frac{x-y}{(x+y)^3}\text{, son}$$

iguales.

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial en la forma $u(x,y)=C$, satisface $u_x(x,y)=M$ y $u_y(x,y)=N$ (donde el subíndice, como es costumbre, representa la variable con respecto a la cual se deriva). Por lo tanto, integrando una de ellas con respecto al subíndice, por ejemplo la primera, obtenemos

$u=\int u_x=\int M\,dx=\int (\frac{y}{(x+y)^2}-1)dx=\frac{-y}{(x+y)}-x+h(y)$. Imponiendo la segunda ecuación no integrada obtenemos

$$u_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{(x+y)}-x+h(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{(x+y)}+h'(y)=$$
$$\frac{-1}{(x+y)}+\frac{-y(-1)}{(x+y)^2}+h'(y)=\frac{-x-y-y(-1)}{(x+y)^2}+h'(y)=\frac{-x}{(x+y)^2}+h'(y)=1-\frac{x}{(x+y)^2}.$$

De esta manera la función $h(y)$ se determina como $h(y)=\int h'dy=\int 1dy=y$. Sintetizando, la solución a la ecuación diferencial exacta es

$$u=\frac{-y}{(x+y)}-x+h(y)=\frac{-y}{(x+y)}-x+y=C.$$

1 c) $\frac{dx}{dt}=x+t^3$

1 c) La ecuación diferencial dada es lineal $\frac{dx}{dt}+P(t)x=f(t)$:

$\frac{dx}{dt}-x=t^3$ con $\mathrm{P(t)}=-1$ y $f(t)=t^3$. Por lo tanto, el factor de integración es

$e^{\int p(t)dt}=e^{-\int 1dt}=e^{-t}$, luego entonces $\left(\frac{dx}{dt}-x\right)e^{-t}=t^3e^{-t}$ ó $\frac{dxe^{-t}}{dt}=t^3e^{-t}$.

Integrando por partes con respecto a t, obtenemos

$xe^{-t}=\int t^3e^{-t}dt=-t^3e^{-t}-3t^2e^{-t}-6te^{-t}-6e^{-t}+C.$

2. **(*15 %)** Un tanque de 50 galones de capacidad contiene inicialmente 10 galones de agua pura. Para $t=0$, una solución salina que contiene 1 libra de sal por galón se vierte en el tanque a razón de 4 gal/ min, mientras que una solución bien mezclada sale del tanque a una razón de 2 gal/ min. Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque en el momento en que éste se llena.

2. Sea $A(t)$ la cantidad de sal presente en cualquier instante en el tanque. Entonces la razón de cambio de la cantidad de sal viene dada por

$A'=1\frac{\text{lb}}{\text{gal}}4\frac{\text{gal}}{\text{min}}-c2\frac{\text{gal}}{\text{min}}$, donde c es la concentración de la mezcla. Como al tiempo t (en minutos) la cantidad de sal es $A(t)$, solo necesitamos conocer el volumen al tiempo t para poder determinar la concentración de la solución saliente, este resulta ser el tiempo por la razón neta a la que se incrementa el volumen: $2t$ (gal), más los 10 galones originales. Por lo tanto la ecuación diferencial para el flujo de mezcla es $A'=4-\frac{A}{2t+10}2$. La cual es una ecuación lineal, con solución $(t+5)A = 2t^2 + 20t + C$. Como en $t = 0, A(0) = 0,$ entonces $C = 0$. Por lo tanto la solución es $A = \dfrac{2t^2 + 20t}{(t+5)} = \dfrac{2t(t+10)}{(t+5)}$. En el instante en que el tanque se llena $2t + 10 = 50(\text{gal})$ ó $t + 5 = 25$. Entonces la cantidad de sal es $A(20) = \dfrac{2t^2 + 20t}{(t+5)} = \dfrac{2t(t+10)}{(t+5)} = \dfrac{40(30)}{25} = 48$ lb.

3. **(*10%)** La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha elevado el nivel de cobalto radiactivo en la región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable? (ignore la presencia de otros elementos radiactivos).

3. Sea $N(t)$ la cantidad de cobalto al tiempo t (en años), entonces en tal región $N(0) = 100N_A$, donde N_A es el nivel tolerable paara la vida humana. Como el modelo para el decaimiento es

$\dfrac{dN}{dt} = kN$ con solución $\ln N = kt + \ln C$ ó $N = Ce^{kt}$. Aplicando la condición en $t = 0, N(0) = 100N_A,$ tenemos que $C = 100N_A$. Por otra parte al tiempo $t = 5.27, N(5.27) = 50N_A,$ la cantidad de cobalto se habrá reducido a la mitad; entonces $50N_A = 100N_A e^{5.27k}$, de donde $k = \dfrac{-\ln 2}{5.27} \cong -0.13153$. La región volverá a ser habitable en el tiempo en el que $N(t) = N_A = 100N_A e^{\frac{-\ln 2}{5.27}t}$, es decir cuando $\dfrac{-\ln 2}{5.27}t = -\ln 100$ ó $t = \dfrac{5.27 \ln 100}{\ln 2} \cong 35.03$ años.

SEGUNDA PARTE

1. **(*10%)** a) Verifique que la función $y_1 = \cos\left(\ln\left(x\right)\right)$ es solución de la ecuación diferencial $x^2 y'' + xy' + y = 0$.

   b) Encuentre una segunda solución y_2 de la ecuación diferencial que forme junto con y_1 un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

   c) Escriba la solución general de la ecuación diferencial.

1 a) Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$x^2(-\cos(\ln x)\frac{1}{x}\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\frac{-1}{x^2}) + x(-\sin(\ln x)\frac{1}{x}) + \cos(\ln x) =$$
$$-\cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0$$

1 b) Por el método de reducción de orden la segunda solución de $y'' + py' + qy = y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ viene dada por

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^{\;2}}dx = \cos(\ln x)\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\cos^2(\ln x)}dx = \cos(\ln x)\int \frac{e^{-\ln x}}{\cos^2(\ln x)}dx$$
$$= \cos(\ln x)\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}dx = \cos(\ln x)\int \frac{du}{\cos^2(u)} \text{ con } u = \ln x.$$

Por lo tanto $y_2 = \cos(\ln x)\tan(\ln x) = \sin(\ln x)$.

1 c) $\{\cos(\ln x), \sin(\ln x)\}$ forma el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2, entonces la solución general es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x).$$

2. **(*15%)** Halle la solución de la ecuación $y'' + 4y = \cos(2x) - x$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2. El conjunto fundamental de soluciones de la homogénea asociada $y'' + 4y = 0$ es $\{\cos 2x, \sin 2x\}$.

Por otro lado, el operador anulador del término no-homogéneo es $(D^2+4)D^2 = 0$. Luego , la forma de la solución particular la obtenemos comparando el conjunto solución de la nueva ecuación homogénea $(D^2+4)D^2(D^2+4)y = 0$: $\{1, x, \cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x\}$ con el conjunto solución de la homogénea asociada. Por lo tanto la solución particular tiene la forma

$$y_p = A + Bx + Cx\cos 2x + Dx\sin 2x.$$

Sustituyendo $y_p = A + Bx + Cx\cos 2x + Dx\sin 2x$, y su segunda derivada $y''_p = 4D\cos 2x - 4C\sin 2x - 4Cx\cos 2x - 4Dx\sin 2x$, en la ecuación diferencial dada:

$$y'' + 4y = 4D\cos 2x - 4C\sin 2x - 4Cx\cos 2x - 4Dx\sin 2x + 4A + 4Bx$$
$$+ 4Cx\cos 2x + 4Dx\sin 2x = 4A + 4Bx + 4D\cos 2x - 4C\sin 2x = \cos 2x - x$$

De donde obtenemos
$4A=0, 4B=-1, 4D=1$ y $-4C=0$ ó $\{A=0, B=-1/4,\ C=0,$ y $D=1/4\}$. Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es

$y=c_1y_1+c_2y_2+y_p=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x\sin 2x$, con primera derivada $y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x$.

Al aplicar condiciones iniciales, obtenemos $c_1=1$ y $c_2=-\frac{3}{8}x$. Por lo tanto la solución al problema de valores iniciales es

$y=\cos 2x-\frac{3}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x\sin 2x$.

3. **(*10%)** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y''+y'-2y=\ln(x)$.

3. El conjunto de soluciones de la homogénea $y''+y-2y=0$ es $\{e^x, e^{-2x}\}$. Luego por el método de variación de parámetros, la solución particular de la ecuación dada tiene la forma $y_p=(e^x)u_1+(e^{-2x})u_2$, donde u_1 y u_2 se encuentran integrando el sistema

$$\left\{\begin{aligned}(e^x)u'_1+(e^{-2x})u'_2&=0\\(e^x)u'_1+(-2e^{-2x})u'_2&=\ln x\end{aligned}\right\}.$$

Se obtiene que $u'_1=\frac{-1}{3}e^{-x}\ln x$ y $u'_2=\frac{-1}{3}e^{2x}\ln x$. Por lo tanto

$u_1=\frac{-1}{3}\int_a^x e^{-t}\ln t\,dt$ y $u_2=\frac{-1}{3}\int_a^x e^{2t}\ln t\,dt$. De este modo la solución general es

$y=c_1y_1+c_2y_2+y_p=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^x\int_a^x e^{-t}\ln t\,dt-\frac{1}{3}e^{-2x}\int_a^x e^{2t}\ln t\,dt$.

TERCERA PARTE

1. **(*15%)** Un cuerpo que pesa 64 libras está sujeto al extremo de un resorte y lo estira 0.32 pies. El cuerpo ocupa una posición que está $2/3$ pies sobre la posición de equilibrio y desde ahí se le comunica una velocidad dirigida hacia abajo de 5 pies/s.
   a) Encuentre la ecuación de movimiento.
   b) ¿Cuántas oscilaciones completas habrá realizado el peso después de 3π segundos?
   c) ¿En qué instantes alcanza el peso por primera vez sus desplazamientos extremos hacia uno y otro lado de la posición de equilibrio?

1.a) En el sistema de unidades *peso* en libras, *longitud* en pies, *tiempo* en segundos, $m = \dfrac{64 \text{ lb}}{32 \text{ pie/s}^2} = 2 \text{ slug}$ y $k = \dfrac{64 \text{ lb}}{0.32 \text{ pie}} = 200 \text{ lb/pie}$, la ecuación diferencial esta dada por $2x''+200x = 0$, con condiciones iniciales $x(0) = -\dfrac{2}{3}$ pies y $x'(0) = 5$ pies/s (con dirección positiva de x hacia el centro de la tierra). La solución es entonces $x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$, con velocidad $x'(t) = -10c_1 \sin 10t + 10c_2 \cos 10t$. Al imponer las condiciones iniciales obtenemos

$x(0) = c_1 1 + c_2 0 = \dfrac{-2}{3}$ y $x'(0) = -10c_1 0 + 10c_2 1 = 5$. Por lo tanto

$$x(t) = \frac{-2}{3}\cos 10t + \frac{1}{2}\sin 10t = \frac{5}{6}\sin(10t - 0.9273).$$

b) La frecuencia angular es $\omega_0 = 10$ y el período del movimiento es $T = 2\pi/\omega_0 = \pi/5$, el tiempo que tarda en completar un ciclo. Por lo tanto en 3π segundos , completará $\dfrac{3\pi}{T} = \dfrac{3\pi}{\pi/5} = 15$ ciclos u oscilaciones.

c) La velocidad del cuerpo está dada por $x'(t) = \dfrac{25}{3}\cos(10t - 0.9273)$. Como en los extremos la velocidad es cero tenemos que $10t - 0.9273 = (2k+1)\pi/2, k$ entero. Por lo tanto dirigiéndose hacia abajo alcanza el extremo en

$t = \dfrac{\pi/2 + 0.9273}{10} \approx 0.25$ y dirigiéndose hacia arriba lo alcanza en

$t = \dfrac{3\pi/2 + 0.9273}{10} \approx 0.56$, ambos por primera vez.

2. **(*15%)** Un cuerpo que pesa 10 lb sujeto a un resorte lo alarga 2 pies. El cuerpo se sujeta a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numérica igual a β veces ($\beta > 0$) la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguación β de modo que el movimiento subsiguiente sea a) sobreamortiguado, b) subamortiguado, c) críticamente amortiguado.

2. Aquí $m = \frac{10 \text{ lb}}{32 \text{ pie/s}^2} = \frac{5}{16}$ slug y $k = \frac{10 \text{ lb}}{2 \text{ pie}} = 5$ lb/pie, la ecuación diferencial de este sistema es $\frac{5}{16}x'' + \beta x' + 5x = 0$ ó $x'' + \frac{16}{5}\beta x' + 16x = 0$. De las soluciones de la ecuación auxiliar $r^2 + \frac{16}{5}\beta r + 16 = 0 : r = \dfrac{-\frac{16}{5}\beta \pm \sqrt{(\frac{16}{5}\beta)^2 - 4(16)}}{2}$ (con $\beta > 0$), obtenemos que

a) el movimiento será sobreamortiguado si $(\frac{16}{5}\beta)^2 - 4(16) > 0$ ó $\frac{16}{25}\beta^2 - 4 > 0$; es decir, si $\beta > \frac{5}{2}$.

b) El movimiento es subamortiguado si $\frac{16}{25}\beta^2 - 4 < 0$, o sea cuando $0 < \beta < \frac{5}{2}$.

c) Será críticamente amortiguado cuando $0 < \beta = \frac{5}{2}$.

3. Una resistencia de 2 ohms, un capacitor de 0.25 farads y una inductancia de 1 henry, se conectan en serie a una fuerza electromotriz $E(t) = 100sen(60t)$, determine $q(t)$ e $i(t)$ si $q(0) = i(0) = 0$.

3. En el sistema de unidades *resistencia* en ohms Ω, *capacitancia* en farads F, *inductancia* en henrys H, *fuerza electromotriz* en volts V, *corriente eléctrica* en amperes A y *carga eléctrica* en coulomb C: la ecuación diferencial para este circuito en serie está dada por

$$1q'' + 2q' + \frac{1}{0.25}q = 100\sin(60t) \text{ ó } q'' + 2q' + 4q = 100\sin(60t), \text{ con } q(0) = i(0) = 0.$$

La solución para esta ecuación diferencial es
$q(t) = e^{-t}(c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t) + q_p(t)$ donde $q_p(t)$ tiene la forma
$q_p(t) = A\cos 60t + B\sin 60t$. Sustituyendo $q_p(t)$ junto con su primera
$q'_p(t) = -60A\sin 60t + 60B\cos 60t$ y segunda derivada
$q''_p(t) = -60^2 A\cos 60t - 60^2 B\sin 60t$, en la ecuación diferencial dada:

$$-60^2 A\cos 60t - 60^2 B\sin 60t + 2(-60A\sin 60t + 60B\cos 60t)$$
$$+ 4(A\cos 60t + B\sin 60t) = 100\sin(60t),$$

obtenemos el sistema $\left\{\begin{matrix} -3596A+120B=0 \\ -3596B-120A=100 \end{matrix}\right\}$. Cuya solución es

$$\left\{\begin{matrix} A=\dfrac{-100(120)}{12945616}=\dfrac{-750}{809101}\approx -9.2695\text{x}10^{-4} \text{ y} \\ B=\dfrac{3596}{120}A=\dfrac{-22475}{809101}\approx -2.7778\text{x}10^{-2}. \end{matrix}\right\}.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$q(t)=e^{-t}(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t)+q_p(t)=e^{-t}(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t)$$
$$+A\cos 60t+B\sin 60t=e^{-t}(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t)-\frac{750}{809101}\cos 60t-\frac{22475}{809101}\sin 60t$$

Con derivada

$$i(t)=q'(t)=e^{-t}\Big((c_2\sqrt{3}-c_1)\cos\sqrt{3}t+(-c_1\sqrt{3}-c_2)\sin\sqrt{3}t\Big)+$$
$$+\frac{45000}{809101}\sin 60t-\frac{1348500}{809101}\cos 60t$$

Aplicando condiciones iniciales obtenemos

$$\left\{\begin{matrix} c_1=\dfrac{750}{809101}\approx 9.2695\text{x}10^{-4} \text{ y} \\ c_2=\dfrac{449750}{809101}\sqrt{3}\approx 0.96278. \end{matrix}\right\}.$$

Por lo tanto la carga en el circuito que *parte del reposo* es

$$q(t)=e^{-t}(9.2695\text{x}10^{-4}\cos\sqrt{3}t+0.96278\sin\sqrt{3}t)$$
$$-9.2695\text{x}10^{-4}\cos 60t-2.7778\text{x}10^{-2}\sin 60t.$$

i(t) se obtiene al derivar la última expresión para la carga $q(t)$.