UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas **Trim: 08-P** **HORA 16:00 – 19:00** EDG08PV
ECUACIONES DIFERENCIALES

NOTA: El examen global consiste de las preguntas marcadas con *. Si presentas una parte, el examen comprende todos los ejercicios de esa parte.

Primera parte

I.1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

I.1.1*(10%) $$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2 Sen\,3x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

I.1.2* (15%) $$\left(1+\ln t+\frac{y}{t}\right)-(1-\ln t)\frac{dy}{dt}=0;\ y(1)=3$$

I.1.3 $$x\frac{dy}{dt}-2y=y^2\ln x;\ y(1)=1$$

I.2* (15%) Se sabe que cierto material radioactivo se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50 miligramos de material presente y después de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar:

a. una expresión para la masa del material radioactivo al momento t.

b. la masa después de 4 horas.

c. el tiempo en que el material se ha desintegrado en la mitad de su masa inicial.

Segunda parte

II.1 Resuelve el siguiente PVF.

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+72y=0;\ y(0)=-4,\ y\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=4$$

II.2* (20%) Usando el método de coeficientes indeterminados, encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$10\frac{d^2y}{dt^2}+59\frac{dy}{dt}+85y=te^{3t}+6$$

II.3* (20%) Calcula la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y''+2y'+y=e^{-t}\ln t$$

II.4 Sea la solución $y_1(t)=\ln t$, calcula la solución general de la ecuación diferencial $t\,y''+y'=0$

Tercera parte

III.1* (20%) Una masa de 40 g estira un resorte 10 cm. Un mecanismo de amortiguación comunica un resistencia al movimiento numéricamente igual a 560 veces la velocidad instantánea.

a) Encuentra la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 2 cm/s.

b) Calcule los tiempos en que la masa pasa por el punto de equilibrio.

c) Determina si se presenta en el mecanismo el fenómeno de la resonancia

III.2 Un circuito simple en serie tiene un inductor de $\frac{1}{2}$ henry, un capacitor de 10^{-6} farads y un resistor de 1000 ohms. La carga inicial del capacitor es cero. Si se conecta el circuito a una batería de 12 volts y se cierra su interruptor en el tiempo $t=0$, halla la carga del capacitor un segundo más tarde, y también la carga de estado estacionario.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas **Trim: 03-O** **HORA 16:00 – 19:00** EDG08PV

ECUACIONES DIFERENCIALES

Hoja de respuestas Profr. Ramón Salazar

Primera parte

I.1.1*(10%)

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2 Sen\ \ 3x$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$\mu=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right)=sin\,x$$
$$\frac{y}{x^2}=-cos\,x+c$$
$$\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=c\Rightarrow c=\frac{4}{\pi}$$

I.1.2* (15%)

$$\left(1+\ln t+\frac{y}{t}\right)-\left(1-\ln t\right)\frac{dy}{dt}=0;\ y(1)=3$$

$$M=1+ln\ \ t+\frac{y}{t}\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{t}$$
$$N=-\left(1-ln\ \ t\right)\qquad \frac{\partial N}{\partial t}=\frac{1}{t}$$
$$\Phi=\int\left(1+ln\ \ t+\frac{y}{t}\right)dt=-\int\left(1-ln\ \ t\right)dy$$
$$\Phi=t\,ln\,t+y\,ln\,t+f\left(y\right)=-y+y\,ln\,t+g\left(t\right)$$
$$t\,ln\,t+y\,ln\,t-y=c$$
$$c=-3$$
$$t\,ln\,t+y\,ln\,t-y=-3$$

I.1.3 $$t\frac{dy}{dt}-2y=y^2\,ln\,t;\ y\left(1\right)=1$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{2}{t}y=\frac{ln\,t}{t}y^2\qquad \mu=e^{-2\int\frac{dt}{t}}=\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t^2}\right)=\left(\frac{ln\,t}{t}\right)\left(\frac{y}{t^2}\right)y$$
$$\frac{y}{t^2}=v\Leftrightarrow y=t^2v$$
$$\frac{d}{dt}v=\left(\frac{ln\,t}{t}\right)v\left(t^2v\right)$$
$$\int\frac{dv}{v^2}=\int t\,ln\,t\,dt$$
$$-\frac{1}{v}=\frac{1}{2}t^2\,ln\,t-\frac{1}{4}t^2+c=-\frac{t^2}{y}$$
$$c=-\frac{3}{4}$$
$$y=-\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2\,ln\,t-\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{4}}$$

I.2* (15%)

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N$$
$$N\left(0\right)=50;\ \ N\left(2\right)=45$$

$$N=ke^{-\lambda t}$$
$$N\left(0\right)=k=50$$
$$N\left(2\right)=50e^{-2\lambda}=45$$
$$\lambda=-\frac{1}{2}ln\left(\frac{45}{50}\right)=0.05268$$

a. $$N\left(t\right)=50e^{-0.05268t}$$

b. $$N\left(4\right)=50e^{-0.05268(4)}=40.5$$

c. $$N\left(t\right)=50e^{-0.05268t}=25$$
$$t=\frac{1}{-0.05268}ln\frac{25}{50}=\frac{ln2}{0.05268}=13.16\,h$$

Segunda parte

II.1 Resuelve el siguiente

PV $$2\frac{d^2y}{dt^2}+72y=0;$$
$$y\left(0\right)=-4,\ \ y\left(\frac{\pi}{12}\right)=4$$

$$2r^2+72=0$$
$$r=\pm 6i$$
$$y\left(t\right)=c_1\,cos\,6t+c_2\,sin\,6t$$
$$y\left(0\right)=c_1=-4$$
$$y\left(\frac{\pi}{12}\right)=c_2=4$$
$$y\left(t\right)=-4\,cos\,6t+4\,sin\,6t$$

II.2* (20%) Usando el método de coeficientes indeterminados, encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$10\frac{d^2y}{dt^2}+59\frac{dy}{dt}+85y=te^{3t}+6$$

$$10r^2+59r+85=0$$
$$y_h\left(t\right)=c_1e^{-\frac{17}{5}t}+c_2e^{-\frac{5}{2}t}$$
$$y_p\left(t\right)=Ate^{3t}+Be^{3t}+C$$
$$10y''+59y'+85y$$
$$=352Ate^{3t}+\left(119A+352B\right)e^{3t}+85C$$
$$=te^{3t}+6$$
$$352A=1\Rightarrow A=\frac{1}{352}$$
$$119A+352B=0\Rightarrow B=-\frac{119}{123904}$$
$$85C=6\Rightarrow C=\frac{6}{85}$$

II.3* (20%) Calcula la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y''+2y'+y=e^{-t}\ln t$$

$$r^2+2r+1=0\quad r_1=r_2=-1$$
$$\begin{bmatrix}u'\\v'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\-e^{-t} & \left(1-t\right)e^{-t}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\e^{-t}\,ln\,t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t\,ln\,t\\ln\,t\end{bmatrix}$$
$$u=-\int t\,ln\,t\,dt=\frac{1}{4}t^2\left(2\,ln\,t-1\right)$$
$$v=\int ln\,t\,dt=t\,ln\,t-t$$
$$y\left(t\right)=\left[c_1+c_2t+\frac{1}{4}\left(2\,ln\,t-1\right)t^2+t\,ln\,t-t\right]e^{-t}$$

II.4 Sea la solución

$$y_1(t)=\ln t\ ;$$
$$t\,y''+y'=0$$

$$t\left(-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{1}{t}=0$$
$$v=\frac{e^{-\int\frac{1}{t}dt}}{ln^2\,t}$$
$$u=\int v=\int\frac{\frac{1}{t}}{ln^2\,t}dt=-\frac{1}{ln\,t}$$
$$y_2\left(t\right)=uy_1=-1$$

, calcula la solución general de la ecuación diferencial

Tercera parte

III.1* (20%) $$40y''+560y'+\frac{40(980)}{10}y=0$$

$$y\left(t\right)=e^{-7t}\left(c_1\,cos\,7t+c_2 sen\ 7t\right)$$
$$y\left(0\right)=c_1=0$$
$$y'\left(t\right)=7c_2e^{-7t}\left(cos\,7t-sen\ 7t\right)$$
$$y'\left(0\right)=7c_2=2\Rightarrow c_2=\frac{2}{7}$$

a) $$y\left(t\right)=\frac{2}{7}e^{-7t}sen\ 7t$$

$$y\left(t\right)=\frac{2}{7}e^{-7t}sen\,7t=0$$
$$\Leftrightarrow sen\,7t=0\Leftrightarrow 7t=k\pi$$

b) $$t=\frac{k}{7}\pi$$

c) No presenta resonancia.

III.2 $$\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dt^2}+1000\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{10^{-6}}=12;\ \ Q\left(0\right)=0,Q'\left(0\right)=0$$

$$r=\frac{-\left(10^3\right)\pm\sqrt{10^6-4\left(\frac{1}{2}\right)\left(10^6\right)}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}=-1000\pm 1000i$$

$$Q_p\left(t\right)=A$$
$$\frac{A}{10^{-6}}=12\Rightarrow A=\frac{12}{10^6}$$
$$Q\left(t\right)=e^{-1000t}\left(c_1\,cos1000t+c_2 sen1000t\right)+\frac{12}{10^6}$$
$$Q\left(0\right)=c_1+\frac{12}{10^6}=0\Rightarrow c_1=-\frac{12}{10^6}$$
$$Q'\left(t\right)=1000e^{-1000t}\left[\left(c_2-c_1\right)cos1000t-\left(c_1+c_2\right)sen1000t\right]$$

$$Q'\left(0\right)=1000\left[\left(c_2-c_1\right)\right]=0\Rightarrow c_2=-\frac{12}{10^6}$$
$$Q\left(1\right)=e^{-1000}\left(-\frac{12}{10^6}cos1000-\frac{12}{10^6}sen1000\right)+\frac{12}{10^6}$$
$$Q\left(1\right)=\frac{12}{10^6}$$
$$Q_E\left(t\right)=\frac{12}{10^6}$$