(8) Sea $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ con coeficientes reales.

Sea $S = \{ \vec{A} \in V \mid \vec{A}$ es matriz simétrica $\}$

Decida si el conjunto S es subespacio vectorial de V

Sol Recordemos que una matriz $H \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se llama simétrica si $H = H^T$, donde H^T es la matriz transpuesta de H.

Veamos si el conjunto S cumple las propiedades

$\underline{i}$ $\vec{0} \in S$

$\underline{ii}$ Si $\vec{v_1} \in S$ y $\vec{v_2} \in S \Rightarrow \vec{v_1} + \vec{v_2} \in S$

$\underline{iii}$ Si $r \in \mathbb{R}$ & $v \in S \Rightarrow r\vec{v} \in S$.

Comprobando:

(i) La matriz $\vec{0}$ es matriz $n \times n$ con todos sus entradas cero ∴ $\vec{0} = \vec{0}^T$. ✓

(ii) Tome 2 matrices simetricas $\vec{A}, \vec{B} \in S$ entonces hay una propiedad para matrices simetricas que dice $(\vec{A} + \vec{B})^T = \vec{A}^T + \vec{B}^T$

Como $\vec{A}$ es simetrica $\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}^T$

Como $\vec{B}$ es simétrica $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}^T$

$\therefore (\vec{A} + \vec{B})^T = \vec{A}^T + \vec{B}^T = \vec{A} + \vec{B}$ ✓

iii Sea $r \in \mathbb{R}$ e $\vec{A} \in S$.

UAM-A México

Entonces $(r\vec{A})^T = r\vec{A}^T$, como $\vec{A} \in S$ se tiene que $\vec{A} = \vec{A}^T \therefore r\vec{A}^T = r\vec{A}$

$\therefore (r\vec{A})^T = r\vec{A}$.

Dres. Georgina Pulido
Ricardo López

$\therefore$ Se cumplen las 3 propiedades y

$\therefore$ El conjunto S de matrices simetricas $n \times n$ es espacio vectorial //

http://galois.azc.uam.mx