① Decida si el conjunto $W=\{(x,y,z)\,/\,x=y,\ 2x+z=0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Sol. Veamos si el conjunto W cumple las propiedades:

i $\vec{0}\in W$

ii Si $\vec{v_1}\in W$, $\vec{v_2}\in W \Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}\in W$.

iii Si $\vec{v}\in W$ & $r\in\mathbb{R} \Rightarrow r\vec{v}\in W$.

Comprobando:

i ¿ $\vec{0}\in W$? $(0,0,0)$, Aquí $x=0$, $y=0$, $z=0$

Entonces $x=y=0$, $2x+z=2\cdot 0+0=0$

$\therefore\ \vec{0}\in W$ ✓

ii Tome $\vec{v_1}=(a_1,a_2,a_3)\in W$

$\vec{v_2}=(b_1,b_2,b_3)\in W$

Como $\vec{v_1}\in W \Rightarrow a_1=a_2$ & $2a_1+a_3=0$ ⊛

Como $\vec{v_2}\in W \Rightarrow b_1=b_2$ & $2b_1+b_3=0$.

Formemos la suma $\vec{v_1}+\vec{v_2}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=$

$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$.

Para ver que $(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)\in W$ se necesita mostrar que: $a_1+b_1=a_2+b_2$

& $2(a_1+b_1)+(a_3+b_3)=0$

Por ⊛ tenemos que $a_1=a_2$ y $b_1=b_2$ $\therefore\ a_1+b_1=a_2+b_2$ ✓

Por ⊛ tenemos que $2a_1+a_3=0$ & $2b_1+b_3=0$ $\therefore$ ✓

$0=0+0=2a_1+a_3+2b_1+b_3=2(a_1+b_1)+(a_3+b_3)=0$

iii Tome $r \in \mathbb{R}$ & $\vec{v_1} = (a_1, a_2, a_3) \in W$.

$\therefore a_1 = a_2$ & $2a_1 + a_3 = 0$ (**)

Veamos si $r\vec{v_1} = (ra_1, ra_2, ra_3) \in W$

Para ello necesitamos : $ra_1 = ra_2$

 & $2ra_1 + ra_3 = 0$ (***)

Como por (**) tenemos que $a_1 = a_2 \Rightarrow ra_1 = ra_2$

Por (**) $2a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow r(2a_1 + a_3) = r0 = 0$

$\therefore$ se cumple (***).

Como el conjunto W cumple las propiedades i, ii, iii se tiene que W si es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. //